INTERSEÇÃO DE DOMÍNIOS DE KRULL

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Mauri Cunha do Nascimento e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 01 de setembro de 1990.

Prof. Dr. Antonio José Engler

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

Agradeço:

Ao Professor Viswanathan pela proposta do presente trabalho, bem como ao incentivo e ensinamentos.

Ao Professor Engler pela atenção, disponibilidade e acompanhamento do trabalho.

Ao Professor Yves por suas valiosas sujestões.

À Neide por seu apoio e incentivo.

A todos os amigos que de uma forma ou de outra contribuiram para que eu chegasse a este trabalho.

À FAPESP que com seu apoio financeiro possibilitou a realização de parte significativa deste trabalho.

A meus filhos

Fernando e Rafael

INTRODUÇÃO

O objetivo inicial deste trabalho foi encontrar condições para que a interseção de um domínio de Dedekind com um anel de valorização principal fosse ainda um domínio de Dedekind, e durante o desenvolvimento do trabalho, passamos a estudar também outros problemas relacionados com interseção de domínios de Krull.

No Parágrafo 1 apresentaremos os conceitos e resultados necessários para a compreensão do trabalho.

No Parágrafo 2 apresentaremos condições para que a interseção de domínios de Krull preserve o corpo de frações.

No Parágrafo 3, dado um grupo de torção G, construiremos exemplos de domínios de Krull com grupo de classes G. Estes domínios serão explicitados e também será conhecido sua família de anéis de valorização essenciais. Isto será obtido a partir de interseção de domínios de Krull. Construiremos também um exemplo de um domínio de Krull com grupo de classes $\mathbb{Z}_2$ contendo um ideal primo minimal não finitamente gerado, concluindo então que o grupo de classes, excluido o caso onde ele é trivial, não fornece informações sobre o número de geradores de ideais primos minimais.

No Parágrafo 4 apresentaremos condições para que a interseção de uma família de caráter finito, de anéis de valorização principais seja um domínio de Dedekind ou um domínio de krull com grupo de classes de torção. Também apresentaremos condições para que a interseção de dois domínios de Dedekind (resp. fatoração única) seja ainda um domínio de Dedekind (resp. fatoração única). Os métodos utilizados nos permitirão também caracterizar domínios de Prüfer unidimensional.

No Parágrafo 5 faremos algumas aplicações dos resultados do Parágrafo 4. Caracterizaremos domínios de Krull que são interseção de um domínio de Dedekind com um domínio de ideais principais semilocal, utilizando a topologia de Zariski. Também construiremos domínios de Dedekind a partir da interseção de um domínio de Dedekind com um anel de valorização principal.

No Parágrafo 6, construiremos um exemplo de um domínio de fatoração única que contem um ideal primo p tal que $\bigcap_{n\geq 1} p^n \neq (0)$. Apesar desta construção fugir dos objetivos iniciais deste trabalho, podemos observar que o domínio construído é interseção de um domínio de fatoração única noetheriano com dois anéis de valorização principais.

NOTAÇÕES

$\mathbb{N}$: o conjunto $\{1,2,3,...\}$

$\mathbb{Z}_p$: o corpo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

$Q(R)$: o corpo de frações de R.

$X_K(R)$: o conjunto dos anéis de valorização de K que contem R.

$\epsilon(R)$: a família dos anéis de valorizações essenciais para R.

$\epsilon(R)^* = \epsilon(R) - \{Q(R)\}$.

m_V: o ideal maximal do anel de valorização V.

$\eta(R)$: o conjunto dos ideais primos de altura 1 de R.

$ht(p)$: a altura do ideal p.

$\dim(R)$: a dimensão de Krull do anel R.

$A \subset B$: inclusão estrita.

(2.3): significa o resultado 2.3 deste trabalho.

■: é usado para indicar final de prova.

ÍNDICE

1.PRELIMINARES

Definição: Um anel de valorização principal é um anel de valorização discreta de posto 1.

Definição: Uma família $\{V_i\}_{i\in I}$ de subanéis de um corpo K é de caráter finito, se para cada $x\in K$, $x\neq 0$, existe no máximo um número finito de índices $i\in I$ tal que x não é unidade um V_i .

Definição: Um domínio R contido em um corpo K é um domínio de Krull se existe uma família $\{V_i\}_{i\in I}$ de caráter finito, de anéis de valorização principais de K tal que $R = \bigcap_{i\in I} V_i$.

Exemplo: O fecho integral de um domínio noetheriano é um domínio de Krull [F-pag.18].

Exemplo: Um domínio de fatoração única é um domínio de Krull [S-pag.16].

Exemplo: Se é R um domínio de Krull e X uma indeterminada sobre R, então R[X] e R[[X]] são domínios de Krull [S-pag.11 e 12].

(1.1) **Proposição** : Seja $\{R_i\}_{i\in I}$ uma família caráter finito, de domínios de Krull contidos em um corpo K. Então, $\bigcap_{i\in I} R_i$ é um domínio de Krull. Assim, uma interseção finita de domínios de Krull é também um domínio de Krull.

Prova: [S-pag.10].

Definição: Um anel de valorização contendo um domínio R é essencial para R, se é um anel de frações de R. O conjunto dos anéis de valorização essenciais para R é denotado por $\varepsilon(R)$ e $\varepsilon(R)^* := \varepsilon(R) - \{Q(R)\}$.

(1.2) **Proposição:** Seja $R := \bigcap_{i\in I} V_i$ onde $\{V_i\}_{i\in I}$ é uma família de caráter finito, de anéis de valorização principais de $Q(R)$. Então $\varepsilon(R)^* = \{V_i \;/\; i\in I$ e V_i é irredundante$\}$ onde V_j irredundante significa $R \neq \bigcap_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} V_i$.

Prova: [E-pag. 86].■

Definição: Um ideal primo minimal em um domínio é um ideal primo de altura 1.

(1.3) **Proposição:** Seja $R := \bigcap_{i\in I} V_i$ onde $\{V_i\}_{i\in I}$ é uma família de caráter finito, de anéis de valorização principais de $Q(R)$. Então:

1) $\varepsilon(R)^* \subseteq \{V_i\}_{i\in I}$.

2) Existe uma correspondência bijetiva entre $\varepsilon(R)^*$ e $\eta(R) := \{p \;/\; p$ é um ideal primo minimal de $R\}$ dada por $V = R_p$ e $p = m_V \cap R$.

Prova: [E-pag. 83].■

Em consequência das proposições anteriores podemos tomar $R = \bigcap_{i\in I} V_i$ onde $\varepsilon(R)^* = \{V_i\}_{i\in I}$, se R é um domínio de Krull.

(1.4) **Proposição:** Sejam R um domínio de Krull, M um sistema multiplicativo de R e $\mathcal{E}(R)^* = \langle V_i \rangle_{i \in I}$. Então $M^{-1}R$ é um domínio de Krull e $\mathcal{E}(M^{-1}R)^* = \{ V_i \ / \ i \in I \text{ e } m_{V_i} \cap M = \emptyset \}$.

Prova: [S-pag.10].■

Definição: Dizemos que um anel D é um domínio de Dedekind se D é um domínio de Krull e $\dim(D) \leq 1$.

Por $\dim(D)$ entendemos a dimensão de Krull de D.

Exemplo: Um domínio de ideais principais é um domínio de Dedekind pois é um domínio de fatoração única de dimensão ≤ 1.

Alguns autores definem domínios de Dedekind através de outras caracterizações. O próximo teorema apresenta formas equivalentes de apresentar domínios de Dedekind. Existem várias outras formas, as quais não citaremos neste trabalho.

Definição: Dizemos que um domínio R é um domínio de Prüfer se todo anel de valorização de Q(R) que contém R é essencial para R.

(1.5) **Teorema:** Para um domínio R são equivalentes:

i) R é um domínio de Dedekind

ii) R é um domínio de Prüfer noetheriano.

iii) R é um domínio noetheriano, integralmente fechado de dimensão menor ou igual a 1.

iv) R é ao mesmo tempo um domínio de Krull e um domínio de Prüfer.

Prova: [E-pag.87 e 89].■

(1.6) **Corolário:** Se R é um domínio de Dedekind e V é um anel de valorização de Q(R) contendo R, então $V \in \mathcal{E}(R)$.

Prova: (1.5)-(ii).■

2 CORPO DE FRAÇÕES DE UMA INTERSEÇÃO

O corpo de frações de domínios tem sido estudado por Gilmer e Heinzer em [G-H] e [H]. Em [G-H], o Corolário 1.5 estabelece que se D_1 e D_2 são domínios com mesmo corpo de frações K, então $D_1 \cap D_2$ tem corpo de frações K se e somente se $I \cap (D_1 \cap D_2)$ é não nulo para cada I ideal não nulo de D_1 (ou de D_2). Em [H], o Lema 1 estabelece que se $D := R \cap V$ onde V é um anel de valorização e R tem radical de Jacobson não nulo e R e V têm mesmo corpo de frações K, então o corpo de frações de D é K. Neste trabalho estamos interessados na interseção de domínios de Krull. Como domínios de Krull são interseção de anéis de valorização, trabalharemos inicialmente com interseção destes anéis (em 2.1, 2.2 e 2.3) para em seguida, em (2.4), estudar a interseção de dois domínios de Krull.

(2.0) **Lema:** Sejam $R \subseteq S$ domínios tal que $S \subset Q(R)$. Se I é um ideal não nulo de S, então $I \cap R$ é um ideal não nulo de R.

Prova: Seja $x \in I$, $x \neq 0$. Como $S \subseteq Q(R)$, então $x = ab^{-1}$ para $a, b \in R$ não nulos. Assim, $a = bx \in I \cap R$. ∎

(2.1) **Proposição:** Seja $R = \bigcap_{i \in I} V_i$ onde $\{V_i\}_{i \in I}$ é uma família de anéis de valorização de um corpo K. São equivalentes:

1) $Q(R) = K$.

2) $\forall V \in X_K(R)$, $m_V \cap R \neq (0)$ onde $X_K(R)$ é a família de anéis de valorização de K que contém R.

3) $\forall V \in X_K(R)$, $\forall \gamma \in v(K)$, $\exists y \in R$ tal que $v(y) \geq \gamma$.

4) K é uma extensão algébrica de $Q(R)$.

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2) Por (2.0).

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $V \in X_K(R)$ e $\gamma \in v(K)$, $\gamma > 0$ e $z \in V$ tal que $v(z) = \gamma$. Seja $q := rad(zV)$. $q \cap R = qV_q \cap V \cap R = qV_q \cap R \neq (0)$ pois $V_q \in X_K(R)$. Seja $t \in q \cap R = rad(zV) \cap R$, logo, $y := t^n \in zV \cap R$ para algum $n > 0$ e portanto $v(y) \geq v(z) = \gamma$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sejam $x \in K-\{0\}$, $X := X_K(R)$ e $V \in X$. Por hipótese, $\exists a_V \in R$ tal que $v(a_V) \geq -v(x)$, logo, $v(a_V x) \geq 0$. Então $V \in E(a_V x) := \{W \in X / R[a_V x] \subseteq W\}$ que é um aberto de X. $X = \bigcup_{V \in X} E(a_V x)$. Como X é compacto [Z-S-II-pag.113] então $X = E(a_{V_1} x) \cup \cdots \cup E(a_{V_r} x)$. Assim, $V \in X \Longrightarrow V \in E(a_{V_i} x)$ para algum $i \in \{1, \ldots, r\} \Rightarrow v(a_{V_i} x) \geq 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, r\}$, logo, $x \prod_{k=1}^{r} a_{V_k} \in V$ pois $a_{V_j} \in R$ $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$. Assim, $x \prod_{k=1}^{r} a_{V_k} \in \bigcap_{V \in X} V = R$ e portanto, $x \in Q(R)$.

(1) $\Rightarrow$ (4) claro.

(4) $\Rightarrow$ (1) Como $R = \bigcap_{i \in I} V_i$ então R é integralmente fechado em K [E-pag.70]. Seja $x \in K$. Como K é uma extensão algébrica de $Q(R)$ então existem $a_i, b_i \in R$, $i = 1, \ldots, n-1$ tais que

$$x^n + \left(\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\right) x^{n-1} + \cdots + \frac{a_o}{b_o} = 0.$$

Seja $c := b_o b_1 \cdots b_{n-1}$. Multiplicando a equação acima por c^n, temos: $(cx)^n + d_{n-1}(cx)^{n-1} + \cdots + d_o = 0$ e $d_i \in R$ $i = 1, \ldots, n-1$. Como R é integralmente fechado em K, então $cx \in R$. Como $c \in R$ e $c \neq 0$, então $x \in Q(R)$. Assim, $K = Q(R)$. ■

Se $\langle V_i \rangle_{i \in I}$ é de caráter finito, temos o seguinte resultado:

(2.2) **Proposição:** Seja $R = \bigcap_{i\in I} V_i$ onde $F:=\{V_i\}_{i\in I}$ é uma família de caráter finito, de anéis de valorização de um corpo K. Seja $F_{sat} := \{W\in X_K(R) / \exists i\in I$ tal que $V_i \subseteq W\}$. São equivalentes:

1) $Q(R) = K$.

2) $\forall\, W \in F_{sat}$, $m_W \cap R \neq (0)$.

3) $\forall\, V_i \in F$, $\forall\, \gamma \in v_i(K)$ $\exists\, y \in R$ tal que $v_i(y) \geq \gamma$.

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2) Por (2.0).

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $\gamma\in v_i(K)$, $\gamma>0$ e $z\in V_i$ tal que $v_i(z)=\gamma$. Seja $q:=\mathrm{rad}(zV_i)$. $q\cap R = q(V_i)_q\cap V_i\cap R = q(V_i)_q\cap R \neq (0)$ pois $(V_i)_q \in F_{sat}$. Seja $t \in q\cap R = \mathrm{rad}(zV_i)\cap R$, logo, $y := t^n \in zV_i\cap R$ para algum $n>0$ e portanto $v_i(y) \geq v_i(z) = \gamma$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja $x\in K$. Se $x\in R$ então $x\in Q(R)$. Se $x\notin R$, como F é de caráter finito, sejam $v_{i_1},\dots,v_{i_n}$ as valorizações de F tais que $v_{i_j}(x)<0$. Por hipótese, para cada $j=1,\dots,n$, $\exists\, x_j\in R$ tal que $v_{i_j}(x_j)\geq -v_{i_j}(x)$, isto é, $v_{i_j}(x_j)+v_{i_j}(x)\geq 0$. Então

$$v_{i_j}(x\prod_{k=1}^{n} x_k) = v_{i_j}(x) + v_{i_j}(x_j) + \sum_{k\neq j} v_{i_j}(x_k) \geq 0.$$

Assim, $x\prod_{k=1}^{n} x_k\in R$ e portanto, $x\in Q(R)$. ∎

Se cada $V\in \langle V_i\rangle_{i\in I}$ tem posto 1 temos:

(2.3) **Proposição:** Seja $R = \bigcap_{i \in I} V_i$ onde $\{V_i\}_{i \in I}$ é uma família de caráter finito, de anéis de valorização de posto 1 de um corpo K. Para cada $i \in I$, seja m_i o ideal maximal de V_i. São equivalentes:

1) $Q(R) = K$.

2) Para cada $i \in I$ $\exists x \in R$ tal que $v_i(x) > 0$.

3) Para cada $i \in I$, $m_{V_i} \cap R \neq (0)$.

Prova: Segue de (2.2), observando que a hipótese $m_{V_i} \cap R \neq (0)$ é equivalente à existência de $y \in R$ tal que $v_i(y) > 0$. Assim, se $n \in \mathbb{Z}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $mv_i(y) \geq n$, isto é, $v_i(y^m) \geq n$. ∎

Veremos a seguir como ampliar a família $(V_i)_{i \in I}$ da proposição anterior sem perder o corpo de frações para o caso onde $R_1 = \bigcap_{i \in I} V_i$ é um domínio de Krull e $\varepsilon(R_1)^* = (V_i)_{i \in I}$. Veremos que neste caso basta verificar as condições (2) e (3) da proposição anterior em $\varepsilon(R_1)^*$.

(2.4) **Proposição:** Sejam R_1 e R_2 domínios com corpo de frações K e $R := R_1 \cap R_2$. Se R_1 é um domínio de Krull, então são equivalentes:

1) K é o corpo de frações de R.

2) Para cada $V \in \varepsilon(R_1)^*$ $\exists x \in R$ tal que $v(x) > 0$

3) $\forall V \in \varepsilon(R_1)^*$, $m_V \cap R \neq (0)$ onde m_V é o ideal maximal de V.

4) Se p é um ideal primo minimal de R_1 então $p \cap R \neq (0)$.

Para provar (2.4) precisamos dos seguintes lemas:

(2.5) **Lema:** Seja R um domínio de Krull e seja p um ideal primo não nulo de R. Então p é a união dos ideais primos minimais contidos em p.

Prova: Seja $\varepsilon(R)^* := \{V_i\}_{i\in I}$. Por (1.4),

$$\varepsilon(R_p)^* = \{V_i \ / \ i\in I \text{ e } m_{V_i} \cap (R-p) = \emptyset\}$$
$$= \{V_i \ / \ i\in I \text{ e } m_{V_i} \cap R \subseteq p\}.$$

Assim, $R_p = \bigcap_{j\in J} V_j$ onde $J := \{i\in I \ / \ m_{V_i} \cap R \subseteq p\}$.

Seja $a\in p$. Então $a \in pR_p$. Como $R_p = \bigcap_{j\in J} V_j$ e a não é unidade de R_p então $a \in m_{V_j} \cap R_p \subseteq pR_p$ para algum $j \in J$. Logo, $a \in m_{V_j} \cap R \subseteq pR_p \cap R = p$ e portanto p está contido na união dos ideais primos minimais contidos em p, logo, p é a união dos ideais primos minimais contidos em p.■

(2.6) **Lema:** Se R é um domínio de Krull, $a\in R$, $a\neq 0$ e $aR \neq R$, então o ideal aR tem altura 1 e seu radical é uma interseção finita de ideais primos minimais.

Prova: Por (2.5), todo ideal primo minimal de aR é um ideal primo minimal e por (1.3), existe somente um número finito de ideais primos minimais que contem a. Logo, o radical de aR é uma interseção finita de ideais primos minimais.■

Pelo lema acima, um domínio de Krull satisfaz o Teorema de ideais principais de Krull mas no Parágrafo 6 será apresentado um exemplo que mostra que um domínio de Krull não satisfaz o Teorema de ideais principal generalizado (veja [K pag.104 e 110]).

Prova de (2.4): (1) $\Longrightarrow$ (4) Por (2.0).

(4) $\Longrightarrow$ (1): Seja I um ideal não nulo de R_1 e seja $x\in I$, $x\neq 0$. Como R_1 é um domínio de Krull, então por (2.6) $\mathrm{rad}(xR_1) := p_1\cap\cdots\cap p_r$ para $p_1,\ldots,p_r \in \eta(R_1)$. Por hipótese, para cada $i\in\{1,\ldots,r\}$ $\exists y_i\in p_i\cap R$, $y_i\neq 0$. Seja $y := \prod_{i=1}^{r} y_i$. Então $y \in p_1\cap\cdots\cap p_r\cap R$, isto é, $y\in R\cap\mathrm{rad}(xR_1)$. Logo, $\exists n\in\mathbb{N}$ tal que $y^n \in R\cap xR_1$. Como $x\in I$, então $xR_1\subseteq I$ e portanto $y^n \in R\cap I$, provando que $R\cap I \neq (0)$. Assim, por [G-H pag.241], K é o corpo de frações de R.

(2) $\Longleftrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) segue da bijeção entre $\eta(R)$ e $s(R)^*$ dada em (1.3).■

3.GRUPO DE CLASSES

Se R é um domínio de Krull, podemos associar a R um grupo abeliano que é o quociente das classes de ideais divisoriais de R pelas classes de ideais divisoriais principais. Dado um grupo abeliano G, Claborn em [C], apresenta um método para construir um domínio de Dedekind com grupo de classes G. Eakin e Heinzer, em [E-H-2] apresentam uma construção mais simples para construir domínios de Dedekind quando G é finitamente gerado. Aqui, vamos construir exemplos de domínios de Krull para G grupo de torção, sendo que estes domínios podem ser explicitados de maneira simples e também conhecido sua família de anéis de valorização essenciais, como veremos em (3.3). Construiremos também um domínio de Krull com grupo de classes $\mathbb{Z}_2$ contendo um ideal primo minimal que não é finitamente gerado.

Se R_1 e R_2 são domínios de Krull, nem sempre $\varepsilon(R_1 \cap R_2)^* = \varepsilon(R_1)^* \cup \varepsilon(R_2)^*$. No resultado a seguir, temos uma condição para a igualdade, que será útil na construção de exemplos em (3.3).

(3.1) **Proposição:** Sejam R_1 e R_2 domínios de Krull com corpo de frações K e seja $R := R_1 \cap R_2$. Se para cada $V \in \varepsilon(R_1)^*$ existe $x \in m_V \cap R$, $x \notin m_W$ $\forall$ $W \in \varepsilon(R_1)^* - \{V\}$ e x unidade de R_2, então:

1) $Q(R) = K$.

2) $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(R_1)^* \cup \varepsilon(R_2)^*$.

3) $\varepsilon(R_1)^* \cap \varepsilon(R_2)^* = \emptyset$.

Prova: 1) Por hipótese $\forall\ V \in \epsilon(R_1)^*$, $m_V \cap R \neq (0)$, logo, por (2.4), $Q(R) = K$.

2) Por (1.3) $\epsilon(R)^* \subseteq \epsilon(R_1)^* \cup \epsilon(R_2)^*$.

Seja $V \in \epsilon(R_1)^*$. Por hipótese $\exists\ x \in m_V \cap R$, $x \notin m_W$ $\forall W \in \epsilon(R_1)^* - \{V\}$ e x unidade em R_2.

Então $x^{-1} \in \bigcap_{W \in \beta} W$ onde $\beta := \epsilon(R_1)^* \cup \epsilon(R_2)^* - \{V\}$. Como $x \in m_V \cap R$ então $x^{-1} \notin R$. Assim, por (1.2) $V \in \epsilon(R)^*$ e portanto $\epsilon(R_1)^* \subseteq \epsilon(R)^*$.

Seja $V \in \epsilon(R_2)^*$ e seja $q \in \eta(R)$, $q \neq m_V \cap R$. Vamos mostrar que $q \not\subset m_V \cap R$, assim, $m_V \cap R \in \eta(R)$ e por (1.3), $V \in \epsilon(R)^*$.

Por (1.3), $q = m_W \cap R$ onde m_W é o ideal maximal de algum $W \in \epsilon(R)^* \subseteq \epsilon(R_1)^* \cup \epsilon(R_2)^*$.

Se $W \in \epsilon(R_1)^*$, por hipótese, $\exists\ x \in m_W \cap R$, x unidade de R_2, logo, x unidade de V. Assim, $x \in m_W \cap R - m_V \cap R$ e portanto $q = m_W \cap R \not\subset m_V \cap R$.

Se $W \in \epsilon(R_2)^*$, como $m_V \cap R \neq m_W \cap R$, então $V \neq W$ e por (1.3) $m_V \cap R_2 \neq m_W \cap R_2$. Seja $x \in m_W \cap R_2 - m_V \cap R_2$. Como $\epsilon(R_1)^*$ é de caráter finito então x não é unidade para no máximo um número finito, digamos $V_1, \ldots, V_n \in \epsilon(R_1)^*$. Por hipótese, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ existe $x_i \in m_i \cap R$ e x_i é unidade em R_2, logo, $x_i \notin m_V \cap R$. Seja m um inteiro positivo tal que $xx_i^m \in V_i$ $\forall i = 1, \ldots, n$. Então $x(x_1 \ldots x_n)^m \in V_i$ $\forall\ i = 1, \ldots, n$, logo, $x(x_1 \ldots x_n)^m \in V'$ $\forall\ V' \in \epsilon(R_1)^*$ e portanto $x(x_1 \ldots x_n)^m \in R_1$.

Como $x, x_1, \ldots, x_n \in R_2$ então $x(x_1 \ldots x_n)^m \in R_2$ e portanto $x(x_1 \ldots x_n)^m \in R_1 \cap R_2 = R$. Como $x \in m_W \cap R_2$, então $x(x_1 \ldots x_n)^m \in m_W \cap R$. Como $x \notin m_V$, $x_i \notin m_V$ $\forall i = 1, \ldots, n$ então $x(x_1 \ldots x_n)^m \notin m_V \cap R$. Temos então que $q = m_W \cap R \not\subset m_V \cap R$

$\forall\ q \in \eta(R),\ q \neq m_V \cap R$. Logo, $m_V \cap R \in \eta(R)$ e por (1.3) $V \in \varepsilon(R)^*$, provando $\varepsilon(R_2)^* \subseteq \varepsilon(R)^*$.

Assim, $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(R_1)^* \cup \varepsilon(R_2)^*$.

3) Se $V \in \varepsilon(R_1)^*$ $\exists x \in m_V \cap R$, x unidade em R_2, logo, $x \notin m_W \cap R$ $\forall W \in \varepsilon(R_2)^*$. Assim, $V \notin \varepsilon(R_2)^*$ e portanto $\varepsilon(R_1)^* \cap \varepsilon(R_2)^* = \emptyset$. ∎

Vamos agora introduzir os conceitos e notações de divisores e de grupo de classes de um domínio de Krull. Estes conceitos podem ser encontrados em [S] ou [B].

Sejam R um domínio e K seu corpo de frações. Um ideal fracionário de R é um R-submódulo de K para o qual existe um elemento $d \in R$ tal que $dM \subseteq R$. M é chamado principal se $M = xR$ para algum $x \in K$ e M é chamado divisorial se M é intersecão de ideais fracionários principais.

Se M é um ideal fracionário denotamos por $\overline{M}$ o menor ideal divisorial que contem M, logo, $\overline{M} = \bigcap_{M \subseteq xR} xR$.

Seja $I(R)$ o conjunto dos ideais fracionários de R. A relação $M \sim N$ se $\overline{M} = \overline{N}$ define uma relação de equivalência em $I(R)$. O conjunto dos divisores de R é definido como o conjunto quociente de $I(R)$ pela relacão "$\sim$" e é denotado por $D(R)$. Existe uma correspondência 1 a 1 entre $D(R)$ e o conjunto dos ideais divisoriais de R. Temos a aplicacão canônica:

$$d: I(R) \longrightarrow D(R)$$

$$d(M) = \overline{M}$$

Se $x \in K-\{0\}$ denotamos $d(xR)$ por $d(x)$.

$I(R)$ é parcialmente ordenado pela inclusão e se $M \subseteq N$ então $\bar{M} \subseteq \bar{N}$. Esta ordem parcial é passada a $D(R)$. Se $M \subseteq N$ denota-se $d(N) \leq d(M)$.

Seja I um conjunto e consideremos o grupo abeliano $\mathbb{Z}^{(I)}$ com a seguinte ordem: $(a_i) \geq (b_i)$ se $a_i \geq b_i$ para todo $i \in I$. R é um domínio de Krull se e somente se existe I tal que $D(R)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}^{(I)}$ como grupo ordenado. Se $\phi: D(R) \longrightarrow \mathbb{Z}^{(I)}$ é um isomorfismo de grupos ordenados e $e_i := (\delta_{ij})$ onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$, chamamos $\phi^{-1}(e_i)$ de divisor primo. Assim, $\{\phi^{-1}(e_i)\}$ gera $D(R)$ e existe uma correspondência bijetora entre $\{\phi^{-1}(e_i)/i \in I\}$, $\eta(R)$ e $\varepsilon(R)^*$ (por [S]-pag.6 e 7 e por (1.3)). Denotando $P_i := \phi^{-1}(e_i)$ então se $d \in D(R)$, d pode ser escrito de maneira única por $d = \sum_{i \in I} n_i P_i$ onde $n_i \in \mathbb{Z}$ e $n_i \neq 0$ para no máximo um número finito de $i \in I$. Se $x \in K-\{0\}$ então $d(x) = \sum_{i \in I} v_i(x) P_i$ [S-pag.6].

Seja $F(R)$ o subgrupo de $D(R)$ formado pelos divisores principais, isto é, $F(R) = \{d(x)/x \in K-\{0\}\}$. O grupo quociente $C(R) := D(R)/F(R)$ é chamado o grupo de classes de divisores de R ou simplesmente grupo de classes de R. O próximo lema é um corolário do Teorema de Nagata:

(3.2) **Lema:** Sejam R_1 e R_2 domínios de Krull com corpo de frações K, $R := R_1 \cap R_2$ tais que $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(R_1)^* \cup \varepsilon(R_2)^*$ e $\varepsilon(R_1)^* \cap \varepsilon(R_2)^* = \emptyset$. Então $C(R_1) \cong \frac{C(R)}{H}$ onde H é o subgrupo de C(R) gerado pelos divisores primos correspondentes aos primos da forma $m_V \cap R$ para $V \in \varepsilon(R_2)^*$.

Prova: Como $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(R_1)^* \cup \varepsilon(R_2)^*$ então R_1 é uma subinterseção de R. Logo, por [F-pag.35], $C(R) \longrightarrow C(R_1)$ é sobrejetor com o núcleo gerado pelas classes dos ideais primos da forma $m_V \cap R$ para $V \in \varepsilon(R_2)^*$ pois $\varepsilon(R_1)^* \cap \varepsilon(R_2)^* = \emptyset$. Assim, $\frac{C(R)}{H} \cong C(R_1)$.∎

Observação: Embora na proposição anterior H seja o subgrupo de C(R) gerado pelos divisores primos correspondentes aos ideais primos da forma $m_V \cap R$ onde $V \in \varepsilon(R_2)^*$, em geral, $H \ncong C(R_2)$, pois conforme o exemplo após (3.3), $R := \mathbb{Q}[X] \cap V$ onde V é um anel de valorização principal, logo, $C(V) \cong (0)$; $C(\mathbb{Q}[X]) \cong (0)$ e $C(R) \cong \mathbb{Z}_n$. Assim, $(0) \cong C(\mathbb{Q}[X]) \cong \frac{C(R)}{H}$, logo, $H = C(R) = \mathbb{Z}_n \ncong (0) = C(V)$.

(3.3) **Proposição:** Sejam

- D um domínio de ideais principais com corpo de frações K;
- $\{p_i\}_{i\in I}$ uma família de elementos primos de D distintos 2 a 2;
- $\{m_i, n_i\}_{i\in I} \subseteq \mathbb{N}$ tais que $MDC(m_i, n_i) = 1$;
- para cada $i\in I$ v_i a valorização de $K(\langle X_i\rangle_{i\in I})$ definida por

$$v_i\left(\sum a_j X_i^j\right) = \min\{n_i v_{p_i}(a_j) + jm_i\}$$

para $\sum a_j X_i^j \in K(\langle X_k\rangle_{k\in I-\{i\}})[X_i]$ e v_{p_i} é a extensão trivial da valorização p_i-ádica de D a $K(\langle X_k\rangle_{k\in I-\{i\}})$;
- V_i o anel de valorização associado a v_i ;
- $R := K[\langle X_i\rangle_{i\in I}]\cap(\bigcap_{i\in I} V_i)$.

Então:

1) $C(R) \cong \langle\{M_i \ / \ i\in I\}\rangle = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{n_i}$ onde cada M_i é a imagem em $C(R)$ do divisor primo correspondente a $m_i\cap R$ onde m_i é o ideal maximal de V_i e $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(K[\langle X_i\rangle_{i\in I}])^*\cup\langle V_i\rangle_{i\in I}$;

2) Se $m_i = 1$ $\forall i\in I$ então $R = T\left[\left\{X_i, \frac{(X_i)^{n_i}}{p_i}\right\}_{i\in I}\right]$ onde $T:=K\cap(\bigcap_{i\in I} V_i)$.

Prova: Observe que por ([B]-Cap. VI-10.1-Lemma 1) cada v_i definida acima é realmente uma valorização.

$\langle V_i\rangle_{i\in I}$ é de caráter finito pois se $f \in K[\{X_i\}_{i\in I}]$, então $f\in K[X_{i_1},\dots,X_{i_n}]$ para $i_1,\dots,i_n\in I$, logo, $v_i(f) \neq 0$ para no máximo um número finito de $i\in I$. Assim $\bigcap_{i\in I} V_i$ é um domínio de Krull.

1) Como D é um domínio de ideais principais e se $i\neq j$, $p_iD\neq p_jD$, então, para cada $i\in I$ $v_i(p_i) = n_i > 0$ e $v_j(p_i) = 0$ para todo $j\neq i$ e p_i é unidade em $K[\langle X_i\rangle_{i\in I}]$. Considerando $D_2 = K[\langle X_i\rangle_{i\in I}]$ e $D_1 = \bigcap_{i\in I} V_i$ então, por (3.1), $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(K[\langle X_i\rangle_{i\in I}])^*\cup\{V_i/i\in I\}$, $\varepsilon(K[\langle X_i\rangle_{i\in I}])^*\cap\{V_i/i\in I\} = \phi$

e $Q(R) = K(\langle X_i\rangle_{i\in I})$ e por (3.2), $C(K[\langle X_i\rangle_{i\in I}]) = \dfrac{C(R)}{\langle\{M_i/i\in I\}\rangle}$ onde para cada $i\in I$, M_i é a imagem em $C(R)$ do divisor primo correspondente a $m_i\cap R$ e como $C(K[\langle X_i\rangle_{i\in I}]) = (0)$ então $C(R) = \langle\{M_i/i\in I\}\rangle$.

Seja $f: D(R) \longrightarrow C(R)$ a projecão canônica e M o subgrupo de $D(R)$ gerado por $\{P_i/i\in I\}$ onde para cada $i\in I$, P_i é o divisor primo correspondente a $m_i\cap R$, isto é, $f(P_i) = M_i$. Como $\ker f = F(R)$ então pelo Teorema de isomorfismo de grupos, $\dfrac{M}{M\cap F(R)} \cong f(M) = C(R)$ pois como vimos acima, $C(R) = \langle\{M_i/i\in I\}\rangle$.

Para cada $i\in I$ seja $Q_i := n_iP_i$. Então $d(p_i) = n_iP_i = Q_i$ pois $v_i(p_i) = n_i$, $v_j(p_i) = 0$ $\forall j\in I-\{i\}$ e p_i é unidade em $K[\langle X_i\rangle_{i\in I}]$. Logo, $\langle\{Q_i/i\in I\}\rangle \subseteq \langle\{P_i/i\in I\}\rangle\cap F(R)$.

Seja $P := a_{i_1}P_{i_1}+\dots+a_{i_r}P_{i_r} \in \langle\{P_i/i\in I\}\rangle\cap F(R)$ e seja $a \in K(\langle X_i\rangle_{i\in I}) - \{0\}$ tal que $d(a) = P$. Como $d(a) = \sum_{i\in I} v_i(a)P_i + \sum_{f\in\mathcal{F}} v_f(a)$ onde $\mathcal{F} := \{f \in K[\langle X_i\rangle_{i\in I}]$ / f é irredutível $\}$ e v_f é a valorização f-ádica de $K[\langle X_i\rangle_{i\in I}]$, então $v_{i_j}(a) = n_{i_j}$ $\forall j\in\{1,\dots,r\}$ e $v_f(a) = 0$ $\forall f\in\mathcal{F}$, logo $a \in K$. Como para cada $i \in I$, $v_i(p_i) = n_i$ então $v_i(K) = (n_i\mathbb{Z})\cup\{\infty\}$, logo, $v_i(a) = n_it_i$ para algum $t_i\in\mathbb{Z}$. Assim,

$$P = n_{i_1}t_{i_1}P_{i_1}+\dots+n_{i_r}t_{i_r}P_{i_r} = t_{i_1}Q_{i_1}+\dots+t_{i_r}Q_{i_r} \in \langle\{Q_i/i\in I\}\rangle,$$

logo,

$\langle\{P_i/i\in I\}\rangle\cap F(R) \subseteq \langle\{Q_i/i\in I\}\rangle$.

Assim, $\langle\{P_i/i\in I\}\rangle\cap F(R) = \langle\{Q_i/i\in I\}\rangle$ e portanto

$$C(R) = \frac{\langle\{P_i/i\in I\}\rangle}{\langle\{Q_i/i\in I\}\rangle} = \frac{\langle\{P_i/i\in I\}\rangle}{\langle\{n_iP_i/i\in I\}\rangle} \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z} \cong \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}_{n_i}.$$

2) Para cada $i\in I$, $v_i(X_i) = 1$, $v_i\left(\frac{(X_i)^{n_i}}{P_i}\right) = 0$, $v_j(X_i) = 0$ e $v_j\left(\frac{(X_i)^{n_i}}{P_i}\right) = 0$ $\forall j\in I-\{i\}$, logo, X_i , $\frac{(X_i)^{n_i}}{P_i} \in R$ e portanto, $T\left[\left\{X_i , \frac{(X_i)^{n_i}}{P_i}\right\}_{i\in I}\right] \subseteq R$.

Seja $f \in R := K[\{X_i\}_{i\in I}]\cap(\bigcap_{i\in I} V_i)$. Então $f \in K[X_{i_1},\ldots,X_{i_t}]$ para $i_1,\ldots,i_t \in I$. Então $f = \sum a_{j_1\ldots j_t}X_{i_1}^{j_1}\ldots X_{i_t}^{j_t}$ onde $a_{j_1\ldots j_t}\in K$. Seja $\ell \in \{1,\ldots,t\}$, então $v_{i_\ell}(f) \geq 0$.

Afirmação: $v_{i_\ell}(a_{j_1\ldots j_n})+j_\ell \geq 0$. (Observe que pode ocorrer, por exemplo, $f = aX_{i_1}X_{i_2} + bX_{i_1}X_{i_3} = (aX_{i_2}+bX_{i_3})X_{i_1}$)

Prova: Sem perda de generalidade vamos considerar v_{i_1} e vamos agrupar os termos em $X_{i_1}^{j_1}$. Então

$v_{i_1}((\sum_k a_{j_1j_{k2}\ldots j_{kt}}X_{i_2}^{j_{k2}}\ldots X_{i_t}^{j_{kt}})X_{i_1}^{j_1}) \geq 0$, $\Longrightarrow$

$v_{i_1}(\sum_k a_{j_1j_{k2}\ldots j_{kt}}X_{i_2}^{j_{k2}}\ldots X_{i_t}^{j_{kt}}) + v_{i_1}(X_{i_1}^{j_1}) \geq 0$ $\Longrightarrow$

$\min_k\left\{v_{i_1}(a_{j_1j_{k2}\ldots j_{kt}})\right\} + j_1 \geq 0$ $\Longrightarrow$

$v_{i_1}(a_{j_1j_{k2}\ldots j_{kt}}) + j_1 \geq 0$ $\forall k$, provando a afirmação.

Temos inicialmente que $f = \sum a_{j_1\ldots j_t}X_{i_1}^{j_1}\ldots X_{i_t}^{j_t}$. Para cada ℓ, $j_\ell = q_\ell n_{i_\ell} + r_\ell$ onde $q_\ell, r_\ell\in\mathbb{N}$ e $0 \leq r_\ell < n_{i_\ell}$. Fazendo

$$a_{j_1\cdots j_n} = \frac{\left(\prod_{\ell=1}^{t}(p_{i_\ell})^{q_\ell}\right)a_{j_1\cdots j_t}}{\prod_{\ell=1}^{t}(p_{i_\ell})^{q_\ell}} = \frac{d_{j_1\cdots j_t}}{\prod_{\ell=1}^{t}(p_{i_\ell})^{q_\ell}}$$

para $d_{j_1\cdots j_n} = \left(\prod_{\ell=1}^{t}(p_{i_\ell})^{q_\ell}\right)a_{j_1\cdots j_n}$ temos então que

$$f = \sum d_{j_1\cdots j_t}\left(\frac{X_{i_1}^{n_1}}{p_{i_1}}\right)^{q_1}\cdots\left(\frac{X_{i_t}^{n_t}}{p_{i_t}}\right)^{q_t} X_{i_1}^{r_1}\cdots X_{i_t}^{r_t}.$$

Para cada $\ell \in \{1,\ldots,t\}$, $v_{i_\ell}(d_{j_1\cdots j_n}) =$

$$= v_{i_\ell}\left(\left(\prod_{\ell=1}^{t}(p_{i_\ell})^{q_\ell}\right)a_{j_1\cdots j_n}\right) =$$

$$= v_{i_\ell}\left(\prod_{\ell=1}^{t}(p_{i_\ell})^{q_\ell}\right) + v_{i_\ell}(a_{j_1\cdots j_n}) \underset{\substack{\uparrow\\ \textbf{Afirmação}}}{\geq}$$

$$\geq q_\ell v_{i_\ell}(p_{i_\ell}) - j_\ell =$$

$$= q_\ell n_{i_\ell} - (q_\ell n_{i_\ell} + r_\ell) = -r_\ell$$

Como $v_{i_\ell}(K) = n_{i_\ell}\mathbb{Z}$ e $0 \leq r_\ell < n_{i_\ell}$ então $v_{i_\ell}(d_{j_1\cdots j_n}) \geq 0$.

Se $i \in I - \{i_1,\ldots,i_t\}$, então $v_i(a_{j_1\cdots j_n}) \geq 0$ e portanto $v_i(d_{j_1\cdots j_n}) \geq 0$. Assim, $d_{j_1\cdots j_n} \in K\cap(\bigcap_{i\in I} V_i) = T$ e portanto $f \in T\left[\left\{X_i, \frac{(X_i)^{n_i}}{p_i}\right\}_{i\in I}\right]$, ficando provado a igualdade $R = T\left[\left\{X_i, \frac{(X_i)^{n_i}}{p_i}\right\}_{i\in I}\right]$. ■

Exemplo: Sejam p um número primo, $n\in\mathbb{N}$ e $R := \mathbb{Z}_{(p)}\left[X, \frac{X^n}{p}\right]$ ($= \mathbb{Q}[X]\cap V$). Então $C(R) = \mathbb{Z}_n$.

Exemplo: Sejam p um número primo, $n\in\mathbb{N}$ e $R := \mathbb{Z}_{(p)}\left[\left\{\frac{X^i}{p^{i-1}}\right\}_{i=1}^{n}\right]$. Então R é um domínio de Krull de dimensão 2 e $C(R) = \mathbb{Z}_n$.

Prova: Vamos mostrar que $R = \mathbb{Q}[X]\cap V$ onde V é o anel de valorização associado à valorização v de $\mathbb{Q}(X)$ definida por

$$v\left(\sum a_i X^i\right) = \min\{nv_p(a_i) + (n-1)i\}$$

onde $\sum a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ e v_p é a valorização p-ádica em $\mathbb{Q}$.

Se $1\leq n$ $v\left(\frac{X^i}{p^{i-1}}\right) = (n-1)i-n(i-1)=n-i \geq 0$, logo, $R \subseteq \mathbb{Q}[X]\cap V$.

Seja $f := a_0 + a_1X + \cdots + a_mX^m \in \mathbb{Q}[X]\cap V$. Então $v(a_iX^i) \geq 0$ para todo i. Assim, para mostrar que $\mathbb{Q}[X]\cap V \subseteq R$ basta mostrar que se $a_iX^i \in \mathbb{Q}[X]$ e $v(a_iX^i) \geq 0$ então $a_iX^i \in R$

Seja então $a_iX^i \in \mathbb{Q}[X]$ tal que $v(a_iX^i) \geq 0$. Vamos considerar $a_i = \frac{b_i}{p^j}$ onde $b_i \in \mathbb{Z}_{(p)} - p\mathbb{Z}_{(p)}$ e $j \in \mathbb{Z}$. Assim, $v(a_iX^i) = v\left(\frac{X^i}{p^j}\right)$.

Considerando $i = qn + r$ onde $q,r\in\mathbb{N}$ e $0\leq r<n$, teremos $\frac{X^i}{p^j} = \left(\frac{X^n}{p^{n-1}}\right)^q \frac{X^r}{p^s}$ onde $s = j-q(n-1)$. Como $v\left(\frac{X^n}{p^{n-1}}\right) = 0$ então $0 \leq v\left(a_iX^i\right) = v\left(b_i\frac{X^i}{p^j}\right) = v\left(\frac{X^i}{p^j}\right) = v\left(\frac{X^r}{p^s}\right) = r(n-1)-sn$, isto é, $s \leq r\frac{n-1}{n}$.

Se $r = 0$ então $s = 0$ e $a_i X^i = b_i \dfrac{X^i}{p^j} = b_i \left(\dfrac{X^n}{p^{n-1}} \right)^q \in R$.

Se $r \neq 0$ então $s < r < n$, logo

$$a_i X^i = b_i \frac{X^i}{p^j} = b_i \left(\frac{X^n}{p^{n-1}} \right)^q \frac{X^r}{p^s} = b_i p^{r-1-s} \left(\frac{X^n}{p^{n-1}} \right)^q \frac{X^r}{p^{r-1}} \in R.$$

Assim, $R := \mathbb{Q}[X] \cap V$ e por (3.3), $C(R) \cong \mathbb{Z}_n$.

Resta mostrar que $\dim(R) = 2$. Como $\mathbb{Z}[X] \subseteq R \subseteq \mathbb{Q}(X)$ e R é um domínio noetheriano, então por [G-pag. 360 e 361], $\dim(R) \leq 2$. Para mostrar que $\dim(R) \geq 2$, basta verificar que $m_V \cap R \subset m_V \cap R + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \cap R \subset R$. Temos $\dfrac{X^n}{p^{n-1}} \in X\mathbb{Q}[X]_{(X)} - m_V \cap R$ pois $v\left(\dfrac{X^n}{p^{n-1}}\right) = 0$. Se $1 \in m_V \cap R + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \cap R$, digamos, $1 = f(X) + Xg(X)$ onde $f(X), g(X) \in \mathbb{Q}[X] \cap R$ e $v(f) > 0$. Então $1 = f(0)$. Como $v(f(X)) > 0$, então $v_p(1) > 0$ o que é um absurdo. Logo, $1 \notin m_V \cap R + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \cap R$ e assim fica provado $m_V \cap R \subset m_V \cap R + X\mathbb{Q}[X]_{(X)} \cap R \subset R$. ∎

Eakin e Heinzer estudaram domínios de Krull contendo ideais primos de minimais que não são finitamente gerados. Em 1968, em [E-H] eles apresentaram um exemplo de dimensão infinta e em 1970 em [E-H-2], um exemplo de dimensão 3. Para o caso de dimensão 2, ainda não sabemos se tal exemplo é possível.

No exemplo anterior podemos perguntar se número mínimo de geradores do ideal $m_V \cap R$ do exemplo acima é n. Em caso afirmativo, teríamos, para todo $n \in \mathbb{N}$, um exemplo de ideal primo minimal em um domínio de Krull de dimensão 2, com número mínimo de geradores igual a n.

Vamos mostrar que $m_v \cap R = \left[p, X, \frac{X^2}{p}, \dots, \frac{X^{n-1}}{p^{n-2}}\right]$. O procedimento é análogo ao que foi feito acima: Como $v(p) = n$ e $v\left(\frac{X^i}{p^{i-1}}\right) = n-i > 0$ para $1 \le i < n$, então $\left[p, \left\{\frac{X^i}{p^{i-1}}\right\}_{i=1}^{n-1}\right] \subseteq m_v \cap R$.

Se $f \in m_v \cap R$, $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m \in \mathbb{Q}[X]$ e $v(f) > 0$. Então $v(a_i X^i) > 0$ para todo i. Assim, para mostrar que $m_v \cap R \subseteq \left[p, \left\{\frac{X^i}{p^{i-1}}\right\}_{i=1}^{n-1}\right]$ basta mostrar que se $a_i X^i \in \mathbb{Q}[X]$ e $v(a_i X^i) > 0$ então $a_i X^i \in \left[p, \left\{\frac{X^i}{p^{i-1}}\right\}_{i=1}^{n-1}\right]$. Trocando "$\ge$" por "$>$", na prova do exemplo acima, vamos considerar dois casos:

Caso $i=0$: $v(a_0) > 0$. neste caso $a_0 \in p\mathbb{Z}_{(p)}$, logo $a_0 \in \left[p, \left\{\frac{X^i}{p^{i-1}}\right\}_{i=1}^{n-1}\right]$

Caso $i>0$: $a_i X^i = b_i p^{r-1-s}\left[\frac{X^n}{p^{n-1}}\right]^q \frac{X^r}{p^{r-1}}$ onde $0 \le s < r\frac{n-1}{n} < r < n$ e $b_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ logo, $a_i X^i \in \left[p, \left\{\frac{X^i}{p^{i-1}}\right\}_{i=1}^{n-1}\right]$.

Assim, $m_v \cap R = \left[p, \left\{\frac{X^i}{p^{i-1}}\right\}_{i=1}^{n-1}\right]$ e portanto o número mínimo de geradores de $m_v \cap R$ é menor ou igual a n.■

Nos exemplos anteriores apresentamos domínios de Krull da forma $R = D \cap V$ com $C(R) \cong \mathbb{Z}_n$ e podemos observar que o número mínimo de geradores de $m_v \cap R$ é menor ou igual a n e também, sem grandes dificuldades, poderemos verificar que o número mínimo de geradores de qualquer ideal primo minimal de R é menor ou igual a n. A partir destes exemplos poderíamos perguntar se num domínio de Krull com grupo de classes finito, o número mínimo de geradores de um ideal primo minimal é sempre finito. Veremos a seguir que isto nem sempre é verdade, construindo um domínio de Krull $R = D \cap V$ onde D é um domínio de fatoração única, $C(R) \cong \mathbb{Z}_2$ e tal que $m_V \cap R$ não é finitamente gerado. Assim, o grupo de classes, excluindo o caso onde ele é trivial, não carrega informações sobre os primos minimais.

Exemplo: Seja $D := K[\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}][\frac{1}{X_1}]$ onde K é um corpo e $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ é um conjunto de indeterminadas. Seja w a valorização de $K(\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}-\{1\}})$ onde $w(f)$ é o menor grau dos monômios de f, para $f \in K[\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}-\{1\}}]$.

Seja v a extensão de w a $K(\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}})$ definida por por

$$v(\sum a_i X_1^i) := \min\{w(a_i) - 2i\}$$

onde $\sum a_i X_1^i \in K(\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}-\{1\}})[X_1]$ (veja [B] pag. 435) e seja V o anel de valorização associado a v.

Definimos $R := D \cap V$.

Afirmação 1: $R = R_1 := K[\{X_i\}_{i \geq 2}, \{X_i X_j X_1\}_{i,j \geq 2}, \frac{1}{X_1}]$,

$$m_V \cap R = p_V := (\{X_i\}_{i \geq 2}, \frac{1}{X_1}),$$

$$p_V^{(2)} := \{x \in R \ / \ v(x) \geq 2\} = (\frac{1}{X_1}).$$

Prova: Seja $f \in R$ (resp. $\in p_V$, resp. $\in p_V^{(2)}$), isto é,

$v(f) \geq 0$ (resp. ≥ 1, resp. ≥ 2) e $f \in D$, digamos,
$f := \sum_{i=-m}^{n} a_i X_1^i$ onde para cada i, $a_i \in K[\{X_i\}_{i \geq 2}]$.

Temos $f = \sum_{i=-m}^{-1} a_i X_1^i + \sum_{i=0}^{n} a_i X_1^i$ e $v(\sum_{i=-m}^{-1} a_i X_1^i) = v(X_1^{-m} \sum_{i=-m}^{-1} a_i X_1^{i+m}) =$

$2m - \min\{w(a_i) - 2(i+m)\} \geq 2m - 2(-1 + m) = 2$, logo,

$v(\sum_{i=0}^{n} a_i X_1^i) \geq 0$ (resp. ≥ 1, resp. ≥ 2).

Mas $v(\sum_{i=0}^{n} a_i X_1^i) = \min\{w(a_i) - 2i\}$, logo, para cada i temos que $w(a_i) \geq 2i$ (resp. $\geq 2i + 1$, resp. $2i + 2$) e assim, o grau do menor monômio de a_i é $\geq 2i$ (resp. $\geq 2i+1$, resp. $\geq 2i+2$). Em vista disso, cada monomio de a_i é da forma

$m_i = aX_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_{2i}}Y$ (resp. $aX_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_{2i}}X_{i_{2i+1}}Y$

resp. $aX_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_{2i}}X_{i_{2i+1}}X_{i_{2i+2}}Y$)

onde $a \in K$ e Y é um produto de variáveis de $\{X_i\}_{i\geq 2}$.

$m_i X_1^i = a(X_1X_{i_1}X_{i_2})\cdots(X_1X_{i_{2i-1}}X_{i_{2i}})Y$

(resp. $= a(X_1X_{i_1}X_{i_2})\cdots(X_1X_{i_{2i-1}}X_{i_{2i}})X_{i_{2i+1}}Y$

resp. $= a(X_1X_{i_1}X_{i_2})\cdots(X_1X_{i_{2i-1}}X_{i_{2i}})(X_1X_{i_{2i+1}}X_{i_{2i+2}})\frac{1}{X_1}Y$)

então, $m_i X_1^i \in R_1$ (resp. $\in (\{X_i\}_{i\geq 2}, \frac{1}{X_1})$, resp. $\in (\frac{1}{X_1})$)

logo, $a_i X_1^i \in R_1$ (resp. $\in (\{X_i\}_{i\geq 2}, \frac{1}{X_1})$, resp. $\in (\frac{1}{X_1})$)

e assim, $f \in R_1$ (resp. $\in (\{X_i\}_{i\geq 2}, \frac{1}{X_1})$, resp. $\in (\frac{1}{X_1})$).

Provamos então que $R \subseteq R_1$, $p_v \subseteq (\{X_i\}_{i\geq 2}, \frac{1}{X_1})$ e $p_v^{(2)} \subseteq (\frac{1}{X_1})$. Como a outra inclusão no outro sentido é imediata, temos então igualdades.

Afirmação 2: p_v não é finitamente gerado.

Prova: Se p_v é finitamente gerado, como $p_v = (\{X_i\}_{i\geq 2}, \frac{1}{X_1})$ então podemos considerar $p_v = (\{X_i\}_{i=2}^{n}, \frac{1}{X_1})$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Seja $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Como $X_m \in p_v$, então $X_m = f_1\frac{1}{X_1} + f_2X_2 + \cdots + f_nX_n$ onde $f_1, \ldots, f_n \in R$ e $\forall i$, $f_i = f_i(X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots, \frac{1}{X_1})$. Então

$$X_m = f_1(X_1,0,\dots,0,X_{n+1},\dots,\frac{1}{X_1})\frac{1}{X_1} + f_2 0 + \cdots + f_n 0$$
$$= f_1(X_1,0,\dots,0,X_{n+1},\dots,\frac{1}{X_1})\frac{1}{X_1}.$$

Como $f_1 \in R$ então $f_1(X_1,0,\dots,0,X_{n+1},\dots,\frac{1}{X_1}) \in R$, logo,

$1 = v(X_m) =$

$= v(f_1(X_1,0,\dots,0,X_{n+1},\dots,\frac{1}{X_1})) + v(\frac{1}{X_1}) \geq 0 + 2 = 2$ o que é um absurdo. Logo, p_V não é finitamente gerado.

Afirmação 3: $\mathcal{E}(R)^* = \mathcal{E}(D)^* \cup \{V\}$.

Prova: Por (1.3), $\mathcal{E}(R)^* \subseteq \mathcal{E}(D)^* \cup \{V\}$ e como $R \neq D$, então por (1.2), $V \in \mathcal{E}(R)^*$. Se $W \in \mathcal{E}(D)^*$, como D é um domínio de fatoração única, $W = D_{(f)}$ para algum f irredutível em D e $w'(f) = 0$ $\forall w' \neq w$ valorização essencial para D. Se $v(f) = n$, então $v(f^2X_1^n) = 0$. Assim, $(f^2X_1^n)^{-1} \in V$, $(f^2X_1^n)^{-1} \in W'$ $\forall W' \in \mathcal{E}(R)^* - \{W\}$ e $(f^2X_1^n)^{-1} \notin W$. Logo, por (1.2), $W \in \mathcal{E}(R)^*$ e portanto $\mathcal{E}(D)^* \subseteq \mathcal{E}(R)^*$. Assim, $\mathcal{E}(R) = \mathcal{E}(D) \cup \{V\}$.

Afirmação 4: $C(R) \cong \mathbb{Z}_2$.

Prova: Pela Afirmação 3, $\mathcal{E}(R)^* = \mathcal{E}(D)^* \cup \{V\}$, logo, por (3.2) $C(D) \cong \frac{C(R)}{\langle c(p_V)\rangle}$ onde $c(p_V)$ é a classe do divisor primo correspondente a p_V . Como D é um domínio de fatoração única, então $C(D) = (0)$, logo, $C(R)$ é gerado por $c(p_V)$. Como p_V não é finitamente gerado e $p_V^{(2)} = (\frac{1}{X_1})$ então $c(p_V) \neq (0)$ e $2c(p_V) = 0$. Assim, $C(R) \cong \mathbb{Z}_2$.■

4. CONDIÇÕES DE APROXIMAÇÃO

E

INTERSEÇÃO DE DOMÍNIOS DE KRULL

Em [H] e [H-O] Heinzer e Ohm estudam condições para que a interseção de dois domínios noetherianos seja ainda um domínio noetheriano. Neste Parágrafo vamos estudar interseção de domínios de Dedekind, que são um caso particular de domínios noetherianos. As técnicas utilizadas por Heinzer e Ohm não se aplicam aqui, pois teríamos interseção de domínio de ideais principais semilocal que seria novamente um domínio de ideais principais semilocal, logo, um caso trivial. Aqui, vamos trabalhar com condições de aproximação nas famílias de anéis de valorização essenciais para obter condições para que a interseção de dois domínios de Dedekind seja ainda um dominio de Dedekind. O mesmo problema será abordado para o caso domínios de fatoração única.

As técnicas utilizadas aqui permite-nos caracterizar também domínios de Prüfer unidimensional, domínios de Dedekind e domínios de Krull com grupo de classes de torção.

Finalizando, apresentamos uma condição para que a interseção de um domínio de Dedekind com um anel de valorização principal seja ainda um domínio noetheriano.

Vamos inicialmente definir condição de aproximação por fibrado e apresentar algumas propriedades para em seguida caracterizar domínios de Prüfer unidimensional e também domínios de Dedekind.

(4.1) **Proposição:** Seja R um domínio contido em um anel de valorização V e seja m_V o ideal maximal de V. São equivalentes:

1) Para cada $x \in V$ existe $y \in R$ tal que $y-x \in m_V$.

2) A restrição do homomorfismo natural $\theta: V \longrightarrow V/m_V$ a R é sobrejeção.

3) $V = R + m_V$.

Prova: (1) $\Leftrightarrow$ (2) claro.

(3) $\Rightarrow$ (1) claro.

(1) $\Rightarrow$ (3) É claro que $R + m_V \subseteq V$. Seja $x \in V$. Então existe $y \in R$ tal que $z := y-x \in m_V$, logo, $x = z-y \in R + m_V$. Assim, $V \subseteq R + m_V$.■

Definição: Se R e V satisfazem as condições equivalentes acima, dizemos que (R,V) satisfaz a condição de aproximação por fibrado.

(4.2) **Lema:** Se (R,V) satisfaz a condição de aproximação por fibrado, então $m_V \cap R$ é um ideal maximal de R. Assim, se $m_V \cap R = (0)$, então R é um corpo.

Prova: Pela Proposição 4.1 - (2) temos que $R/(m_V \cap R) \cong V/m_V$. Logo, $m_V \cap R$ é um ideal maximal de R.■

(4.3) **Proposição:** Seja R um subanel de um corpo K tal que R não é um corpo. Se para cada $V \in X_K(R)$, (R,V) satisfaz a condição de aproximação por fibrado, então:

1) $\dim(R) = 1$.

2) $Q(R) = K$.

3) Se D é um sobreanel de R, $D \neq K$, então $\dim(D) = 1$.

4) O fecho integral de R é um domínio de Prüfer.

Prova: 1) Seja p um ideal primo não nulo de R. Por [E-pag.62] existe $V \in X_K(R)$ tal que $m_V \cap R = p$. Pelo lema anterior, p é um ideal maximal de R. Assim, todo ideal primo não nulo é maximal, logo, $\dim(R) = 1$.

2) Seja $\bar{R}$ o fecho integral de R em K e denotamos $X := X_K(R)$. Então $\bar{R} = \bigcap_{V \in X} V$. Como, por hipótese, (R,V) satisfaz a condição de aproximação por fibrado, então, $(\bar{R},V)$ também satisfaz (4.1-3). Como R não é um corpo, então, por (4.2) $\forall V \in X$, $m_V \cap R \neq (0)$. Logo, por (2.1), $Q(\bar{R}) = K$. Como $\bar{R}$ é integral sobre R, então K ($= Q(\bar{R})$) é uma extensão algébrica de $Q(R)$, logo, por (2.1), $Q(R) = K$.

3) Seja $W \in X_K(D) \subseteq X_K(R)$. Por hipótese, (R,W) satisfaz a condição de aproximação por fibrado, isto é,

$W = R + m_W \subseteq D + m_W \subseteq W$

logo, por (4.1-3), (D,W) também satisfaz. Assim, por (1), $\dim(D) = 1$.

4) Por (1) e (3) $\dim(R) = \dim_V(R) = 1$ onde

$\dim_V(R) := \sup\{\dim(V) \ / \ V \text{ é sobreanel de valorização de } R\}$.

Então, por [G-pag.363], $\dim_V(R[X]) = 2$ e por [G-pag.364] o fecho integral de R é um domínio de Prüfer.■

$\forall V \in X_{\mathbb{C}(X)}(\mathbb{C})$, $(\mathbb{C},V)$ satisfaz a condição de aproximação por fibrado, justificando a hipótese de R não ser corpo para o item 2 da proposição anterior. Para provar isso, seja $V \in X_{\mathbb{C}(X)}(\mathbb{C})$. Se $V = \mathbb{C}[X]_{(X-a)}$ para algum $a \in \mathbb{C}$ e se $x \in V$, então

$$x = \frac{a_0 + a_1(X-a) + \cdots + a_n(X-a)^n}{b_0 + b_1(X-a) + \cdots + b_m(X-a)^m}.$$ Como $v(x) \geq 0$ então podemos considerar $b_0 \neq 0$.

$$v\left[x - \frac{a_0}{b_0}\right] =$$

$$= v\left[\frac{b_0a_0 + b_0\, a_1(X-a) + \cdots + b_0a_n(X-a)^n - b_0a_0 - \cdots - a_0b_m(X-a)^m}{b_0^2 + b_0b_1(X-a) + \cdots + b_0b_m(X-a)^m}\right]$$

$$= v\left[\frac{(X-a)(b_0a_1 + \cdots)}{b_0^2 + b_0b_1(X-a) + \cdots + b_0b_m(X-a)^m}\right] \geq 1$$

Se $V = \mathbb{C}[X^{-1}]_{(X^{-1})}$ e se $x \in V$, $x \neq 0$ então

$$x = \frac{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n}{b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m}, \quad a_n \neq 0,\ b_m \neq 0.\ v(x) \geq 0 \Rightarrow m \geq n.$$

Se $v(x) > 0$ então $x \in m_V$. Se $v(x) = 0$ então $m=n$ e

$$v\left[x - \frac{a_n}{b_n}\right] =$$

$$v\left[\frac{b_na_0 + b_n\, a_1X + \cdots + b_na_nX^n - a_nb_0 - \cdots - a_nb_nX^n}{b_nb_0 + b_nb_1X + \cdots + (b_n)^2X^n}\right] =$$

$$v\left[\frac{b_na_0 - a_nb_0 + \cdots + (b_na_{n-1} - a_nb_{n-1})X^{n-1}}{b_nb_0 + b_nb_1X + \cdots + (b_n)^2X^n}\right] \geq 1.$$

Assim, $(\mathbb{C},V)$ satisfaz a condição de aproximação por fibrado.

(4.4) **Proposição:** Se R é um domínio de Prüfer de dimensão 1 e $K := Q(R)$, então para cada $V \in X_K(R)$, (R,V) satisfaz a condição de aproximação por fibrado.

Prova: Sejam $V \in X_K(R)$ e $p := m_V \cap R$. Por [E-pag.72], $V = R_p$. Vamos mostrar que $V = R + m_V$.

É claro que $R + m_V \subseteq V$. Seja $x \in V = R_p$, $x = \frac{a}{b}$ onde $a \in R$, $b \in R - p$. Se $a \in p$ então $x \in m_V \subseteq R + m_V$. Se $a \notin p$ então $ab \notin p$. Como $\dim(R) = 1$ então p é um ideal maximal de R, logo, $p + abR = R$. Sejam $d \in p$ e $r \in R$ tais que $d + abr = a$. Então, $x = \frac{a}{b} = ar + \frac{d}{b} \in R + pR_p = R + m_V$, provando $V \subseteq R + m_V$. ∎

Como consequência dos resultados anteriores, segue uma caracterização de domínios de Prüfer de dimensão 1 através da condição de aproximação por fibrado:

(4.5) **Corolário:** Seja R um domínio integralmente fechado com corpo de frações K, $R \neq K$. Então R é um domínio de Prüfer de dimensão 1 se, e somente se, para cada $V \in X_K(R)$, $V \neq K$, (R,V) satisfaz a condição de aproximação por fibrado.

Prova: Segue de (4.3) e (4.4). ∎

Observe que um domínio de Dedekind é um domínio de Prüfer de dimensão 1. A seguir vamos caracterizar um domínio de Dedekind R como um domínio de Krull tal que para todo $V \in \varepsilon(R)^*$, (R,V) satisfaz a condição de aproximação por fibrado. Apresentaremos também outras caracterizações, como por exemplo a que aparece em [E-pag.92] ("Strong approximation condition").

(4.6) **Proposição:** Seja $\{V_i\}_{i\in I}$ uma família de caráter finito, de anéis de valorização principais de um corpo K e seja $R:=\bigcap_{i\in I} V_i$. Para cada $i\in I$, sejam v_i a valorização normalizada associada a V_i e m_i o ideal maximal de V_i. São equivalentes:

1) R é um domínio de Dedekind e $Q(R) = K$.

2) (Strong approximation condition) Dados $i_1,\dots,i_r\in I$, $n_1,\dots,n_r\in\mathbb{Z}$, e $x_1,\dots,x_r\in K$, existe $y\in K$ tal que $v_{i_j}(y-x_j)=n_j$ $\forall j=1,\dots,r$ e $v_i(y)\geq 0$ para todo $i\in I-\{i_1,\dots,i_r\}$.

3) Dados $i\in I$ e $x\in V_i$ $\exists y\in K$ tal que $0<v_i(y-x)<\infty$ e $v_j(y)\geq 0$ $\forall j\in I-\{i\}$.

4) Dados $i\in I$ e $x\in V_i$ $\exists y\in K$, $y\neq 0$ tal que $v_i(y-x)>0$ e $v_j(y)\geq 0$ $\forall j\in I-\{i\}$.

5) $Q(R) = K$ e para cada $i\in I$, (R,V_i) satisfaz a condição de aproximação por fibrado.

6) $Q(R) = K$ e $\forall i\in I$, $m_i\cap R$ é um ideal maximal de R.

Prova: (1) $\Rightarrow$ (2) [E-pag.92].

(2) $\Rightarrow$ (3) claro.

(3) $\Rightarrow$ (4) Por (3), dados $i\in I$, $x\in V_i$, $\exists y\in K$ tais que $0<v_i(y-x)<\infty$ e $v_j(y)\geq 0$ $\forall j\in I-\{i\}$. Se $y\neq 0$, terminamos. Se $y=0$, então $v_i(x)>0$. Como $0\in V_i$, então, por (3), $\exists z\in K$ tal que $0 < v_i(z-0) < \infty$ e $v_j(z) \geq 0$, $\forall j\in I-\{i\}$. Assim, $z\neq 0$, $v_i(z-x) \geq \min\{ v_i(z),v_i(x) \} > 0$ e $v_j(z) \geq 0$ $\forall j\in I-\{i\}$.

(4) $\Rightarrow$ (5) Para cada $i\in I$, $0\in V_i$, logo, $\exists y\in K$, $y\neq 0$ tal que $v_i(y) >0$ e $v_j(y) \geq 0$ $\forall j\in I-\{i\}$. Assim, $y\in R$ e $v_i(y) > 0$, logo, por (2.3), $Q(R) = K$.

Para cada $i\in I$, $R + m_i \subseteq V_i$. Seja $x\in V_i$. Por hipótese, $\exists y\in K$ tal que $v_i(y-x) > 0$ e $v_j(y) \geq 0$ $\forall j\in I-\{i\}$. Como $v_i(x) \geq 0$

então $v_i(y) \geq 0$. Assim, $y \in R$ e tomando $z := y - x \in m_i$, temos que $x = y - z \in R + m_i$ provando $V_i = R + m_i$. Então, (R, V_i) satisfaz a condição de aproximação por fibrado.

(5) $\Rightarrow$ (6) Por (4.2).

(6) $\Rightarrow$ (1) Por definição R é um domínio de Krull, por (1.3) os ideais primos minimais de R são da forma $m_i \cap R$ para algum $i \in I$. Por (2.5) todo ideal maximal m de R contém um ideal primo minimal, logo, m contem $m_i \cap R$ para algum $i \in I$ tal que $m_i \cap R \in \eta(R)$. Como por hipótese $m_i \cap R$ é maximal, então $m = m_i \cap R$ é minimal. Assim, $\dim(R) = 1$ e portanto R é um domínio de Dedekind. ∎

Dados D_1 e D_2 domínios de Dedekind e $R := D_1 \cap D_2$, então por (1.3) $\varepsilon(R)^*, \subseteq \varepsilon(D_1)^* \cup \varepsilon(D_2)^*$. Veremos abaixo que para R ser um domínio de Dedekind é suficiente verificar as condições equivalentes da proposição anterior somente para os anéis de valorização $V \in \varepsilon(D_1)^*$ (ou $\varepsilon(D_2)^*$).

(4.7) **Proposição:** Sejam D_1 e D_2 domínios de Dedekind, $R := D_1 \cap D_2$ tais que R, D_1 e D_2 têm o mesmo corpo de frações K. São equivalentes:

1) R é um domínio de Dedekind.

2) Dados $V_1,\dots,V_r \in \varepsilon(D_1)^*$, $n_1,\dots,n_r \in \mathbb{Z}$ e $x_1,\dots,x_r \in K$ existe $y \in K$ tal que $v_i(y-x_i) = n_i$ $\forall i=1,\dots,r$ e $v(y) \geq 0$ $\forall V \in \varepsilon(D_1)^* \cup \varepsilon(D_2)^* - \{V_1,\dots,V_r\}$.

3) Dados $V \in \varepsilon(D_1)^*$, $x \in V$ existe $y \in K$ tal que $0 < v(y-x) < \infty$ e $w(y) \geq 0$ $\forall W \in \varepsilon(D_1)^* \cup \varepsilon(D_2)^* - \{V\}$.

4) Dado $V \in \varepsilon(D_1)^*, x \in V$ existe $y \in K$, $y \neq 0$ tal que $v(y-x) > 0$ e $w(y) \geq 0$ $\forall W \in \varepsilon(D_1)^* \cup \varepsilon(D_2)^* - \{V\}$.

5) $\forall V \in \varepsilon(D_1)^*$, (R,V) satisfaz a condição de aproximação por fibrado.

6) $\forall p \in \eta(D_1)$, $p \cap R$ é um ideal maximal de R.

Prova: (1) ⟹ (2) Por (4.6).

(2) ⟹ (3) ⟹ (4) ⟹ (5) ⟹ (6) é análogo à prova destas implicações em (4.6).

(6) ⟹ (1) Como R é interseção de dois domínios de Krull, então R é um domínio de Krull. Resta mostrar então que $\dim(R) \leq 1$. Seja M um ideal primo de R. Por (1.4) $\varepsilon(R_M)^* = \{V \in \varepsilon(R)^* \ / \ m_V \cap R \subseteq M\}$. Se existe $V \in \varepsilon(R_M)^* \cap \varepsilon(D_1)^*$, então $m_V \cap R_M \subseteq MR_M$, logo, $m_V \cap R \subseteq M$. Mas por hipótese, $m_V \cap R = m_V \cap D_1 \cap R$ é maximal pois $m_V \cap D_1 \in \eta(D_1)$, logo, $M = m_V \cap R$ é minimal. Se $\varepsilon(R_M)^* \cap \varepsilon(D_1)^* = \emptyset$ então $\varepsilon(R_M)^* \subseteq \varepsilon(D_2)^*$, isto é, R_M é uma subinterseção de D_2. Logo, por [E-pag.75], R_M é um domínio de Prüfer e como R_M é um domínio de Krull, então por (1.5) R_M é um domínio de Dedekind, logo, $\dim(R_M) = 1$ e

portanto, $ht(M) = 1$. Assim, R é um domínio de Krull unidimensional e portanto R é um domínio de Dedekind.■

Domínios de Krull e domínios de fatoração única são caracterizados através de suas famílias de valorizações essenciais (veja [E-pag.92] e [G-pag.534]). Enunciaremos estes dois resultados e a seguir faremos uma caracterização de domínios de Krull com grupo de classes de torção também a partir das valorizações essenciais destes domínios. Outras caracterizações podem ser encontradas em [F-pag.33].

(4.8) **Proposição:** Seja $R = \bigcap_{i\in I} V_i$ onde $\{V_i\}_{i\in I}$ é uma família de caráter finito, de anéis de valorização principais de um corpo K. Para cada $i\in I$, seja m_i o ideal maximal de V_i. São equivalentes:

1) R é um domínio de Krull e $\varepsilon(R)^* = \{V_i\}_{i\in I}$.

2) (Weak approximation Condition) Dados $i_1,\dots,i_r\in I$, $n_1,\dots,n_r\in \mathbb{Z}$, existe $y\in K$ tal que $v_{i_j}(y) = n_j$ $(j=1,\dots,r)$ e $v_i(y)\geq 0$ $\forall i\in I-\{i_1,\dots,i_r\}$.

3) Para cada par de elementos $i,j\in I$, $\exists y\in R$ tais que $v_i(y)>0$ e $v_j(y)=0$.

Prova: [E-pag.91].

(4.9) **Proposição:** Seja $\{V_i\}_{i\in I}$ uma família de caráter finito, de anéis de valorização principais de um corpo K e seja $R:=\bigcap_{i\in I} V_i$. Para cada $i\in I$, sejam v_i a valorização normalizada associada a V_i e m_i o ideal maximal de V_i. São equivalentes:

1) R é um domínio de fatoração única e $\varepsilon(R)^* = \{V_i\}_{i\in I}$.

2) Para cada $i\in I$, $\exists a_i\in R$ tal que $v_i(a_i) = 1$ e $v_j(a_i) = 0$ $\forall j\in I-\{i\}$.

3) Para cada $i\in I$, $m_i\cap R$ é um ideal principal não nulo de R.

Prova: [G-pag.534].

(4.10) **Proposição:** Seja $\{V_i\}_{i\in I}$ uma família de caráter finito, de anéis de valorização principais de um corpo K e seja $R:=\bigcap_{i\in I} V_i$. Para cada $i\in I$, sejam v_i a valorização normalizada associada a V_i e m_i o ideal maximal de V_i. São equivalentes:

1) R é um domínio de Krull com grupo de classes de torção e $\varepsilon(R)^* = \{V_i / i\in I\}$.

2) Para cada $i\in I$, $\exists a_i\in R$ tal que $v_i(a_i) > 0$ e $v_j(a_i) = 0$ $\forall j\in I-\{i\}$.

3) Para cada $i\in I$, $(m_i\cap R)^{(n)} := \{x\in R \;/\; v_i(x) \geq n\}$ é um ideal principal não nulo de R, para algum $n\in\mathbb{N}$.

Prova: (1) $\Longrightarrow$ (2) Se C(R) é um grupo de torção, então para cada $i\in I$ existe um inteiro positivo n_i e $x_i\in K-\{0\}$ tal que $n_iP_i = d(x_i)$. Como $d(x_i) = \sum_{j\in I} v_j(x_i)P_j$ então $v_i(x_i) = n_i$ e $v_j(x_i) = 0$ $\forall j\in I-\{i\}$.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Para cada $i\in I$ seja $x_i\in R$ tal que $v_i(x_i) > 0$ e

$v_j(x_i) = 0 \quad \forall j\in I-\{i\}$. Então $d(x_i) = \sum_{j\in I} v_j(x_i)P_j = v_i(x_i)P_i$ onde para cada $j\in I$, P_j é o divisor primo correspondente a $m_j\cap R$. Logo, P_i é um elemento de torção de $C(R)$. Como $\{P_i \ / \ i\in I\}$ gera $C(R)$, então $C(R)$ é um grupo de torção.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) [F-pag 33].∎

Observação: Se R é um domínio de Krull e D é uma subinterseção de R, isto é, $D = \bigcap_{i\in I} V_i$ onde $\{V_i\}_{i\in I} \subseteq \varepsilon(R)^*$, então se $\varepsilon(R)^*$ satisfaz a condição (2) de (4.6) (resp.(4.8) resp. (4.9) resp.(4.10)), então $\varepsilon(D)^*$ também satisfaz. Assim, se R é um domínio de Dedekind (resp.Krull resp.fatoração única resp.$C(R)$ é de torção) então D também é e $\varepsilon(D)^* = \{V_i\}_{i\in I}$.

Para um domínio de Krull qualquer, podemos caracterizar os ideais primos principais através das valorizações essenciais:

(4.11) **Proposição:** Sejam R um domínio de Krull, $\varepsilon(R)^* = \{V_i\}_{i\in I}$, $i\in I$ e $a\in R$. Então $v_i(a)=n$ e $v_j(a)=0$ para todo $j\in I-\{i\}$ se e somente se $(m_i\cap R)^{(n)} = aR$ onde m_i é o ideal maximal de V_i.

Prova: ($\Rightarrow$) Como $v_i(ab) = v_i(a) + v_i(b) \geq n + 0 \geq n$ $\forall b\in R$, então $aR \subseteq (m_i\cap R)^{(n)}$. Seja $x\in R$ tal que $v_i(x) \geq n$. Então $v_i(\frac{x}{a}) \geq 0$ e $v_j(\frac{x}{a}) = v_j(x) - v_j(a) = v_j(x) + 0 \geq 0$ pois $x\in R$. Logo, $\frac{x}{a} \in R$ e $x \in aR$. Assim, $(m_i\cap R)^{(n)} \subseteq aR$, provando a igualdade.

($\Leftarrow$) Como $(m_i \cap R)^{(n)} = aR$, então $v_i(a) = n$. Seja $j \in I-\{i\}$. Por (4.8) existe $y \in K$ tal que $v_i(y) = n$, $v_j(y) = 0$ e $v_k(y) \geq 0$ para todo $k \in I-\{i,j\}$. Então $y \in (m_i \cap R)^{(n)} = aR$, digamos, $y = ab$, $b \in R$. Temos $0 = v_j(ab) = v_j(a) + v_j(b)$, logo, $v_j(a) = 0$. Assim, $v_i(a) = n$ e $v_j(a) = 0$ para todo $j \in I-\{i\}$. ∎

Dados D_1 e D_2 domínios de fatoração única e $R := D_1 \cap D_2$, então por (1.2), $\varepsilon(R)^* \subseteq \varepsilon(D_1)^* \cup \varepsilon(D_2)^*$. A seguir veremos que para R ser um domínio de fatoração única, é suficiente verificar as condições equivalentes da Proposição 4.9 somente para as valorizações $V \in \varepsilon(R)^* \cap \varepsilon(D_1)^*$ (ou $\varepsilon(R)^* \cap \varepsilon(D_2)^*$), observando (1.3).

(4.12) **Proposição:** Sejam D_1 e D_2 domínios de fatoração única, $R := D_1 \cap D_2$ tais que R, D_1 e D_2 têm o mesmo corpo de frações K. São equivalentes:

1) R é um domínio de fatoração única.

2) $\forall\ V \in \varepsilon(R)^* \cap \varepsilon(D_1)^*$, $m_V \cap R$ é um ideal principal.

3) $\forall\ p \in \eta(D_1)$ tal que $p \cap R \in \eta(R)$, $p \cap R$ é um ideal principal.

Prova: (1) $\Longrightarrow$ (2) Por (4.9).

(2) $\Longrightarrow$ (1) Seja S o sistema multiplicativo de R gerado pelos elementos primos x de R tais que $xR = m_V \cap R$ para algum $V \in \varepsilon(R)^* \cap \varepsilon(D_1)^*$. Por [F-pag.36], para mostrar que R é um domínio de fatoração única, basta mostrar que $S^{-1}R$ é um domínio de fatoração única. Para fazer isto, vamos mostrar que $S^{-1}R$ é uma subinterseção de D_2 .

Por (1.4) $\varepsilon(S^{-1}R)^* = \{V\in\varepsilon(R)^* \,/\, m_V\cap S = \emptyset\}$.

Como $R = D_1\cap D_2$, logo, por (1.3), $\varepsilon(R)^* \subseteq \varepsilon(D_1)^*\cap\varepsilon(D_2)^*$

Seja $V \in \varepsilon(R)^*$. Se $V \in \varepsilon(D_1)^*$, então por hipótese, $m_V\cap R = xR$ para algum $x \in R$, $x\neq 0$ pois R e D_1 têm o mesmo corpo de frações. Logo, $x \in S$ e portanto $V \notin \varepsilon(S^{-1}R)^*$. Assim, $\varepsilon(S^{-1}R)^* \subseteq \varepsilon(D_2)^*$, isto é, $S^{-1}R$ é uma subinterseção de D_2 que por hipótese, é um domínio de fatoração única. Logo, $S^{-1}R$ é um domínio de fatoração única (veja observação após (4.10)).

(2) $\Leftrightarrow$ (3) Por (1.3).∎

O resultado a seguir será utilizado para determinar quando a interseção de um domínio de Dedekind com um anel de valorização principal é um domínio noetheriano (em 4.14), para determinar ideais maximais minimais e elementos primos em domínios do tipo $\mathbb{Q}[X]\cap V$ e também para caracterizar domínios de Krull que são interseção de um domínio de Dedekind com um domínio de ideais principais semilocal (5.3).

(4.13) **Proposição:** Sejam D um domínio, $V_1,\dots,V_n$ anéis de valorização de posto 1 e $R := D\cap V_1\cap\cdots\cap V_n$ tais que $D, V_1,\dots,V_n$ têm o mesmo corpo de frações K. Para cada $i\in\{1,\dots,n\}$, sejam $\mathfrak{m}_i$ o ideal maximal de V_i e $\mathfrak{p}_i := \mathfrak{m}_i\cap R$. Então:

1) $R[\frac{1}{a}] = D[\frac{1}{a}]$ $\forall$ $a \in \cap\mathfrak{p}_i$, $a\neq 0$.

2) Se $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R tal que $\cap\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}$, então existe um ideal primo $\mathfrak{q}$ de D tal que $D_{\mathfrak{q}} = R_{\mathfrak{p}}$.

3) Se $d := \dim(D)$ e $\mathfrak{p}$ é um ideal primo de R de altura maior que d, então $\cap\mathfrak{p}_i \subseteq \mathfrak{p}$.

4) Se D é um domínio de Prufer tal que para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ de D que contem $\cap\mathfrak{p}_i$, $R_{\mathfrak{m}}$ é um anel de valorização, então R é um domínio de Prufer.

5) Se para cada i, $\mathfrak{p}_i$ é um ideal maximal de R, então $\dim(R) \leq \dim(D) + 1$. Se além disso, o grupo de valores de cada V_i é um subgrupo de $\mathbb{Q}$, e $D \neq K$, então $\dim(R) \leq \dim(D)$.

Prova: 1) Para todo i, $a \in \mathfrak{m}_i$, logo $V_i[\frac{1}{a}] = K$ pois V_i é um anel de valorização de posto 1. Assim, por [A-M-pag.39] $R[\frac{1}{a}] = D[\frac{1}{a}]\cap V_1[\frac{1}{a}]\cap\cdots\cap V_n[\frac{1}{a}] = D[\frac{1}{a}]$.

2) Seja $a \in \cap\mathfrak{p}_i - \mathfrak{p}$. Então $\mathfrak{p}R[\frac{1}{a}]$ é um ideal primo de $R[\frac{1}{a}] = D[\frac{1}{a}]$, logo, $\mathfrak{q} := \mathfrak{p}R[\frac{1}{a}]\cap D$ é um ideal primo de D e $\mathfrak{q}\cap R = \mathfrak{p}R[\frac{1}{a}]\cap D\cap R = \mathfrak{p}R[\frac{1}{a}]\cap R = \mathfrak{p}$. Logo, $R_{\mathfrak{p}} \subseteq D_{\mathfrak{q}}$. Seja $\frac{d}{s} \in D_{\mathfrak{q}}$ onde $d \in D$ e $s \in D - q$. Como $D \subseteq D[\frac{1}{a}] = R[\frac{1}{a}]$ então $d,s \in R[\frac{1}{a}]$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n d, a^n s \in R$. Então $\frac{d}{s} = \frac{a^n d}{a^n s} \in R_{\mathfrak{p}}$ pois $a,s \notin \mathfrak{q}$, logo, $a^n s \notin \mathfrak{q}$ e portanto, $a^n s \notin \mathfrak{p}$.

3) Seja p um ideal primo de altura maior que d e suponhamos por absurdo que $\cap p_i \not\subset p$. Por (2) existe um ideal primo q de D tal que $R_p = D_q$. Assim,

$$d < ht(p) = dim(R_p) = dim(D_q) = ht(q) \le d$$

o que é um absurdo. Logo, $\cap p_i \subseteq p$.

4) Seja m um ideal maximal de R. Se $\cap p_i \subseteq m$, então, por hipótese, R_m é um anel de valorização. Se $\cap p_i \not\subset m$, então por (2), existe um ideal primo q de D tal que $R_m = D_q$ que é um anel de valorização, pois D é um domínio de Prufer. Assim, por [E-pag.73] R é um domínio de Prufer.

5) Seja $d := dim(D)$. Para cada i, $ht(p_i) \le d + 1$ pois, caso contrário, se $ht(p_i) > d + 1$ para algum i, existe um ideal primo $p \subset p_i$ com $ht(p) \ge d + 1$. Logo, por (3) e por [A-M-pag.73], existe $j \in \{1,\dots,n\}$ tal que $p_j \subseteq p \subset p_i$ o que é uma contradição, pois por hipótese, p_j é maximal. Se m é um ideal maximal de R, $m \ne p_i$ $\forall i$, então $\cap p_i \not\subset m$. Logo, por (3), $ht(m) \le d$. Assim, $dim(R) \le dim(D) + 1$.

Se o grupo de valores de cada V_i é um subgrupo de $\mathbb{Q}$, podemos supor que cada V_i é irredundante na interseção $D\cap V_1\cap\cdots V_n$ pois se, por exemplo, V_n não é irredundante, os resultados de (1) a (4) valem para $R = D\cap V_1\cap\cdots\cap V_{n-1}$. Como $p_1\cap\cdots\cap p_{n-1} \not\subset p_n$, então por (3), $ht(p_n) \le d$.

Por [E-pag.51], $ht(p_i) = 1$.

Se m é um ideal maximal e $m \ne p_i$ $\forall i$, então $p_1\cap\cdots\cap p_n \not\subset m$. Logo, por (3), $ht(m) \le dim(D)$. Assim, $dim(R) \le dim(D)$.■

Como aplicação do resultado anterior, vamos determinar ideais maximais minimais em um domínio de Krull da forma $\mathbb{Q}[X]\cap V$.

Seja p um número primo e seja $R = \mathbb{Z}_{(p)}[X, \frac{X^2}{p}, \ldots, \frac{X^n}{p^{n-1}}] = \mathbb{Q}[X]\cap V$ onde V é o anel de valorização associado à valorização de $\mathbb{Q}[X]$ definida por $v(\sum a_i X^i) = \min\{nv_p(a_i) + (n-1)i\}$ onde v_p é a valorização p-ádica de $\mathbb{Z}$ e $\sum a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ (veja exemplo após (3.3)). Como $p \in m_v\cap R$ e p é unidade em $\mathbb{Q}[X]$, então por (3.1), $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(\mathbb{Q}[X])^*\cup\{V\}$.

Seja $f \in \mathbb{Z}[X]$ irredutível e da forma $f = \begin{cases} a + pXg & \text{se } n=1 \\ a + Xg & \text{se } n\geq 2 \end{cases}$ onde $a \in \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$ e $g \in \mathbb{Z}[X]$. Seja w a valorização f-ádica de $\mathbb{Q}[X]$. Então $w(f) = 1$, $v(f) = 0$ e $w'(f) = 0$ para as outras valorizações essenciais para R pois como vimos acima, $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(\mathbb{Q}[X])^*\cup\{V\}$. Assim, por (4.11) $m_v\cap R = fR$ é um ideal primo minimal de R.

Temos que fR é um ideal maximal pois caso contrário, se $fR \subset m$ para algum ideal primo m, então por ((4.13)-3) $p \in m$ e se $n \geq 2$, $X \in m$ e portanto, $a \in m$ o que é um absurdo, pois a é unidade em R.

Assim, fR é um ideal maximal e minimal de R.

Exemplo 1: O ideal de $\mathbb{Z}_{(p)}[X]$ gerado por $pX^n + 1$ é um ideal maximal e minimal $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2: $3X^3 + 6X^2 + 12X + 2$ é um polinômio irredutível de $\mathbb{Z}[X]$ (critério de Eisenstein). Assim, o ideal de $\mathbb{Z}_{(3)}[X]$ gerado por este polinômio é maximal e minimal.

Se D é um domínio de Dedekind e V é um anel de valorização principal, nem sempre $D \cap V$ é um domínio noetheriano (veja [N-Example pag.28]. Em [H-O-pag.295] temos que se $m_V \cap R$ é um ideal maximal, então R é noetheriano, mas neste caso, por (4.7), R é um domínio de Dedekind, logo precisamos verificar o caso onde $m_V \cap R$ não é maximal. Em [H-pag.8] temos que se o radical de jacobson de D for não nulo, então R é noetheriano. Neste caso, como estamos considerando D domínio de Dedekind, então D é uma interseção finita de anéis de valorização principais, logo, R também é e portanto R é um domínio de Dedekind.

A partir de técnicas utilizadas em [Ea] é possível obter uma condição para que $D \cap V$ seja ainda noetheriano, o que será feito no próximo resultado. Em [Ea] temos o seguinte resultado (Theorem 1.15):

"Suponhamos que R seja um domínio que não é anel de valorização e seja K seu corpo de frações. Então $R[\alpha]$ é noetheriano para todo $\alpha \in K - R$ se e somente se R é noetheriano."

(4.14) **Proposição:** Sejam D um domínio de Dedekind, V um anel de valorização principal e $R := D \cap V$ tais que K é o corpo de frações de D, R e de V. Se $R[x]$ é noetheriano para todo $x \in m_V - R$, então R é noetheriano.

Prova: Se $\dim(R) = 1$, então R é um domínio de Dedekind, logo, noetheriano. Vamos supor então que $\dim(R) > 1$. Seja $a \in m_V \cap R$.

Afirmação 1: Existe $b \in R$ tal que $x := \frac{a}{b} \notin R$. e se $c \in R$ tal que $\frac{ac}{b} \in R$, então $\frac{c}{b} \in R$.

Afirmação 2: $\frac{R}{aR} \cong \frac{R[x]}{xR[x]}$.

Vamos provar a proposição e depois as afirmações.

Seja p um ideal primo de R de altura maior que 1. Por (4.13), $m_v \cap R \subseteq p$, logo, $a \in p$. Então $\frac{p}{aR}$ é um ideal primo de $\frac{R}{aR} = \frac{R[x]}{xR[x]}$ que é noetheriano pois R[x] é noetheriano. Logo, $\frac{p}{aR}$ é finitamente gerado, digamos por $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_n$ onde $a_1,\ldots,a_n \in R$ e portanto, p é gerado por $a,a_1,\ldots,a_n$. Assim, todo ideal primo de R de altura maior que 1 é finitamente gerado e então por [M-pag 295], R é um domínio noetheriano.

Prova da afirmação 1: Como $\dim(R) = 2$, então $R \neq D$, logo, por (1.2), $V \in \varepsilon(R)^*$. Como $\varepsilon(R)^*$ é de caráter finito então existe no máximo um número finito, digamos $V = W_1,\ldots,W_n \in \varepsilon(R)^*$ onde a não é unidade. Como $\dim(R) > 1$ então por $\varepsilon(R)^*$ é infinito pois,caso contrário, R seria um domínio de Dedekind [E]-pag.78], logo existe $W_{n+1} \in \varepsilon(R)^* - \{W_1,\ldots,W_n\}$. Por (4.8) existe $b \in K$ tal que $w_i(b) = 0$ para $i=1,\ldots,n$; $w_{n+1}(b) > 0$ e $w(b) \geq 0$ para as outras valorizações essenciais para R e portanto $b \in R$.

$$v(\frac{a}{b}) = v(a) - v(b) = v(a) > 0, \text{ logo, } \frac{a}{b} \in m_v .$$

$$w_{n+1}(\frac{a}{b}) = w_{n+1}(a) - w_{n+1}(b) = -w_{n+1}(b) < 0, \text{ logo, } \frac{a}{b} \notin R.$$

Se $c \in R$ tal que $\frac{ac}{b} \in R$. Então $\forall i=1,\ldots,n$ $w_i(b) = 0$, logo, $w_i(\frac{c}{b}) \geq 0$. Se w é uma valorização essencial para R, $w \neq w_i$ $\forall i=1,\ldots,n$ então $w(a) = 0$, logo, $w(\frac{c}{b}) = w(\frac{ac}{b}) \geq 0$ pois $\frac{ac}{b} \in R$. Assim, $\frac{c}{b} \in R$, provando a afirmação 1.

Prova da afirmação 2: Vamos proceder como na prova do

Teorema 1.15 de [Ea]. Inicialmente vamos mostrar a igualdade $aR = xR[x]\cap R$. Como $aR \subseteq aR[x] = bxR[x] \subseteq xR[x]$, então $aR \subseteq xR[x]\cap R.]\cap R$.

Seja $y \in xR[x]\cap R$, $y := x(a_o+a_1x+\cdots+a_nx^n)$ onde $a_i \in R$ $\forall i$ e n minimal. Se $n > 0$, multiplicando a igualdade por $(a_n)^n$, temos:

$0 = -y(a_n)^n + a_o(a_n)^{n-1}(a_nx) + \cdots + (a_nx)^{n+1}$ que é uma equação de dependência integral de a_nx sobre R. Como R é integralmente fechado, então $a_nx \in R$ e portanto $y = x(a_o+\cdots+(a_{n-1}+a_nx)x^{n-1})$ contradizendo a minimalidade de n. Logo, n deve ser 0 e $\frac{a_oa}{b} = a_ox = y \in R$, logo $\frac{a_o}{b} \in R$ pois b foi tomado de forma que valha esta propriedade. Assim, $y = a\frac{a_o}{b} \in aR$ e portanto, $xR[x]\cap R = aR$. Assim, $\frac{R}{aR} \subseteq \frac{R[x]}{xR[x]}$. Mas cada elemento de R[x] é congruente a algum elemento de R módulo xR[x], então a inclusão vem a ser uma igualdade: $\frac{R}{aR} = \frac{R[x]}{xR[x]}$, provando a afirmação 2.■

5. APLICAÇÕES DOS RESULTADOS DO PARÁGRAFO 4

Neste parágrafo vamos apresentar algumas aplicações dos resultados do parágrafo anterior. Vamos enunciar condições para que toda subinterseção de um domínio de Krull seja um domínio de Dedekind , verificar quando um domínio de Krull é interseção de um domínio de Dedekind com um domínio de ideais principais semilocal, apresentar uma nova prova que o anel de funções de Kronecker é um domínio de ideais principais e finalmente, apresentar um exemplo de um domínio de Dedekind a partir da interseção de uma extensão finita de um anel de polinômios com uma extensão da valorização x^{-1}- ádica.

D. D. Anderson e D. F. Anderson, em [A-A-pag. 270] apresentam condições para que todo sobreanel de um domínio seja um domínio de Krull. A partir da caracterização de domínios de Krull com grupo de classes de torção (4.10), vamos apresentar a seguir, condições para que toda subinterseção própria de um domínio de Krull seja um domínio de Dedekind.

(5.1) **Proposição:** Seja R um domínio de Krull com grupo de classes de torção. Então toda subinterseção própria de R é um domínio de Dedekind se e somente se R é quase local de dimensão 2 ou R é um domínio de Dedekind.

Prova: ($\Longrightarrow$) Suponhamos que toda subinterseção de R é um domínio de Dedekind. Se dim(R) > 2, seja $(0) \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{P}_3$

uma cadeia de primos em R e seja $a \in p_a$, $a \notin p_2$. Então, por (1.4), $R[\frac{1}{a}]$ é uma subinterseção de R e por [A-M-pag.41], $\dim(R[\frac{1}{a}]) \geq 2$, logo, $R[\frac{1}{a}]$ não é um domínio de Dedekind, contradizendo a hipótese. Se $\dim(R) = 2$ mas R não é quase local, sejam m_1 e m_2 ideais maximais distintos de R com $ht(m_1) = 2$ e seja $a \in m_2$, $a \notin m_1$. Da mesma forma como foi verificado acima, $R[\frac{1}{a}]$ é uma subinterseção de R e não é um domínio de Dedekind, também contradizendo a hipótese. Assim, R é quase local de dimensão 2 ou R é um domínio de Dedekind.

($\Longleftarrow$) Sejam $\varepsilon(R)^* = (V_i)_{i \in I}$, D uma subinterseção de R, e $J := \{i \in I / V_i \in \varepsilon(R)^* - \varepsilon(D)^*\}$. Por (4.10), para cada $j \in J$ existe $x_j \in R$ tal que $v_j(x_j) > 0$ e $v_i(x_j) = 0$ $\forall i \in I - \{j\}$. Seja S o sistema multiplicativo gerado por $\{x_j / j \in J\}$. Por (1.4) $\varepsilon(S^{-1}R)^* = \{V_i / i \in I - J\} = \varepsilon(D)^*$, logo, $D = S^{-1}R$. Como R é local de dimensão 2 e para cada $j \in J$, $x_j \in R$ e x_j não é unidade, então por [A-M-pag.41], $\dim(D) = 1$, logo, D é um domínio de Dedekind.■

(5.2) **Corolário:** Seja R um domínio de fatoração única quase local de dimensão 2. Então toda subinterseção própria de R é um domínio de ideais principais.

Prova: Se S é uma subinterseção de R, então S é um domínio de fatoração única (veja observação após 4.10). Por (5.1), S é um domínio de Dedekind. Assim, S é um domínio de ideais principais.■

Em [A-A-pag.6], D.D Anderson e D.F.Anderson verificam que o grupo de classes de um domínio de Krull R é finitamente gerado se e somente se $R = R_1 \cap R_2$ com R_1 e R_2 subinterseções de R, R_1 domínio de fatoração única e R_2 domínio de ideais principais semilocal. A seguir, vamos caracterizar domínios de Krull do tipo $R = R_1 \cap R_2$ para R_1 domínio de Dedekind e R_2 domínio de ideais principais semilocal, utilizando a topologia de Zariski.

Seja R um domínio com corpo de frações K. Como em [S-Z], a superfície de Riemann de R é um espaço topológico X(R) formado pelos anéis de valorização de K que contém R. Uma base de abertos em X(R) é dada pelos conjuntos

$$\begin{aligned} E(x_1,\ldots,x_n) &:= \{V \in X(R) \;/\; x_i \in V \;\forall i=1,\ldots,n\} \\ &= \{V \in X(R) \;/\; R[x_1,\ldots,x_n] \subseteq V\} \\ &= X(R[x_1,\ldots,x_n]) \end{aligned}$$

onde $\{x_1,\ldots,x_n\}$ percorre os subconjuntos finitos de K.

(5.3) **Proposição:** Seja R um domínio de Krull com corpo de frações K, $R \neq K$. São equivalentes:

1) $R = D \cap V_1 \cap \cdots \cap V_n$ onde D é um domínio de Dedekind, cada V_i é um anel de valorização principal e D, $V_1,\ldots,V_n$ e R têm o mesmo corpo de frações.

2) $\eta_0(R) := \eta(R) \cup \{(0)\}$ contém um aberto não vazio de Spec(R).

3) $\varepsilon(R)$ contém um aberto não vazio de X(R).

4) A interseção dos ideais primos de R, de altura maior que 1 é não nula.

Prova: (1) $\Longrightarrow$ (2) Para cada i, seja $\mathfrak{m}_i$ o ideal maximal de V_i .

Seja $a \in R\cap m_1\cap\cdots\cap m_n$, $a \neq 0$. Por (4.13-3),
$X_a := \{p \in Spec(R) \ / \ a \notin p\} \subseteq \eta_o(R)$. Como $(0) \in X_a$, então X_a é um aberto não vazio de Spec(R) contido em $\eta_o(R)$.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Seja $a \in R$, $a \neq 0$ tal que $X_a \subseteq \eta_o(R)$. Seja $V \in E(\frac{1}{a})$. Como $a \in R \subseteq V$ e $\frac{1}{a} \in V$, então $a \notin m_V\cap R$, portanto $m_V\cap R\in X_a\subseteq\eta_o(R)$. Logo, por (1.3), $V \in \varepsilon(R)$. Assim, $E(\frac{1}{a}) \subseteq \varepsilon(R)$ e como $K \in E(\frac{1}{a})$ então $\varepsilon(R)$ contem um aberto não vazio de X(R).

(3) $\Longrightarrow$ (1) Seja $E(x_1,\ldots,x_r) \subseteq \varepsilon(R)$ onde $x_1,\ldots,x_r \in K$. Como $\varepsilon(R)$ é de caráter finito, então existe no máximo um conjunto finito de elementos de $\varepsilon(R)$, digamos, $V_1,\ldots,V_n$ tais que $\{x_1,\ldots x_r\} \not\subset V_i$ $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$. Assim,
$X(R[x_1,\ldots,x_r]) = E(x_1,\ldots,x_r) = \varepsilon(R) - \{V_1,\ldots,V_n\}$.
Seja D o fecho integral de $R[x_1,\ldots,x_r]$. Então D é a interseção dos elementos de $\varepsilon(R) - \{V_1,\ldots,V_n\}$. Se $\varepsilon(R) - \{V_1,\ldots,V_n\} \neq \{K\}$ então D é uma subinterseção de R, logo, D é um domínio de Krull e $\varepsilon(D) = \varepsilon(R) - \{V_1,\ldots,V_n\} = X(R[x_1,\ldots,x_r]) = X(D)$ (veja observação após 4.10). Logo, por definição, D é um domínio de Prufer e por (1.5), D é um domínio de Dedekind. Como $\varepsilon(D) = \varepsilon(R) - \{V_1,\ldots,V_n\}$, então $R = D\cap V_1,\ldots,V_n$. Se $\varepsilon(R) - \{V_1,\ldots,V_n\} = \{K\}$, então $D = K$ e também, $R = D\cap V_1,\ldots,V_n$.

(2) $\Longrightarrow$ (4) Seja $a\in R$, $a\neq 0$ tal que $X_a \subseteq \eta_o(R)$. Assim, a pertence a todo ideal primo de R, de altura maior que 1.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Se $\dim(R) = 1$ então R é um domínio de Dedekind e não há nada a provar. Se $\dim(R) > 1$, seja $a\in R$, $a\neq 0$ tal que a pertence a todo ideal primo de R, de altura maior que 1. Seja

$D := R[\frac{1}{a}]$. Então $\dim(D) = 1$, isto é, D é um domínio de Dedekind e por (1.4), $\mathcal{E}(D) = \{V\in\mathcal{E}(R) \ / \ a\notin m_V\}$. Como R é um domínio de Krull, então existe somente um número finito, digamos, $V_1,\ldots,V_n \in \mathcal{E}(R)$ tal que $a\in m_{V_i}$, $i=1,\ldots,n$. Assim, $\mathcal{E}(R)^* = \mathcal{E}(D)^*\cup\{V_1,\ldots,V_n\}$ e portanto, $R = D\cap V_1\cap\cdots\cap V_n$.■

Na condição (1) da proposição anterior temos que R é interseção de um domínio de Dedekind com um domínio de ideais principais semilocal, como consequêcia do lema abaixo:

(5.4) **Lema:** Seja $\{V_i\}_{i=1}^{n}$ uma família de anéis de valorização principais de um corpo K e seja $R:=\bigcap_{i=1}^{n} V_i$. Então R é um domínio de ideais principais semilocal.

Prova: Por definição, R é um domínio de Krull e por [E-pag.78] R é um domínio de Prüfer semilocal, logo, por (1.5), R é um domínio de Dedekind semilocal.

Por (4.8), para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$ existe $a_i\in K$ tal que $v_i(a_i) = 1$ e $v_j(a_i) = 0$ para todo $j\in\{1,\ldots,n\}-\{i\}$. Logo, $a_i\in R$ e por (4.9), R é um domínio de fatoração única. Assim, R é um domínio de ideais principais semilocal.■

Exemplo: Se R é um domínio de Krull de dimensão 2, quase semi local, então R é interseção de um domínio de Dedekind com um domínio de ideais principais semi local pois a interseção dos ideais primos de altura 2 é uma interseção finita, logo, não nula.

Em [G-pag. 552] temos que o anel de funções de Kronecker de um domínio de Krull com respeito à v-operação é um domínio de ideais principais. Isto é obtido a partir de $*$-operation mostrando que tal anel é um domínio de Bezout, logo, um domínio de Prüfer. Na próxima proposição faremos uma nova prova deste resultado a partir das condições de aproximação que aparecem em (4.6) e (4.9).

(5.5) **Proposição:** Sejam R um domínio de Krull, $K := Q(R)$ e seja $\varepsilon(R)^* = \{V_i\}_{i\in I}$. Para cada $i\in I$ seja W_i a extensão de V_i a $K(X)$ (resp. $K((X))$) associada à valorização definida por $w_i\left(\sum a_j X^j\right) = \min_j\{v_i(a_j)\}$, para $\sum a_i X^i \in R[X]$ (resp. $R[[X]]$). Seja $T = \bigcap_{i\in I} W_i$. Então T é um domínio de ideais principais.

Prova: Vamos mostrar que T é um domínio de fatoração única e um domínio de Dedekind e concluir que T é um domínio de ideais principais.

Para provar que T é um domínio de fatoração única, vamos provar o item (2) de (4.9):

Seja $i\in I$. Por (4.8)-(2), $\exists a\in Q(R)$ tal que $v_i(a) = 1$ e $v_j(a)\geq 0$ $\forall j\in I-\{i\}$. Como $\{V_i\}_{i\in I}$ é de caráter finito, existem $i_1,\ldots,i_r\in I$ tais que $v_j(a) = 0$ $\forall j\in I-\{i,i_1,\ldots,i_r\}$. Novamente, por (2.3)-(2), existe $b\in Q(R)$ tal que $v_i(b) = 1$, $v_{i_1}(b) = \cdots = v_{i_r}(b) = 0$ e $v_j(b)\geq 0$ $\forall j\in I-\{i,i_1,\ldots,i_r\}$.
Assim, $w_i(a + bX) = \min\{v_i(a),v_i(b)\} = 1$.
$w_j(a + bX) = \min\{v_j(a),v_j(b)\} = 0$ $\forall j\in I-\{i\}$ pois se $j\in\{i_1,\ldots,i_r\}$ então $v_j(b) = 0$ e se $j\notin\{i,i_1,\ldots,i_r\}$ então

$v_j(a) = 0$. Logo, por (4.9), T é um domínio de fatoração única.

Para provar que T é um domínio de Dedekind, vamos provar o item (4) de (4.6):

Sejam $i \in I$ e $x := \frac{f}{g} \in W_i$, $x \neq 0$, onde $f, g \in R[X]$ (resp. $R[[X]]$). Se $w_i(x) > 0$, basta tomar $y \in R$ tal que $v_i(y) > 0$, pois neste caso, $w_i(x-y) \geq \min\{w_i(x), w_i(y)\} > 0$ e $w_j(y) = v_j(y) \geq 0$. Vamos supor então que $w_i(x) = 0$, isto é, $w_i(f) = w_i(g)$. Tomando

$$f := \sum f_i X^i \in R[X] \text{ (resp. } R[[X]]) \text{ e}$$

$$g := \sum g_i X^i \in R[X] \text{ resp. } R[[X]]),$$

seja $J := \{j \;/\; v_i(f_j) = w_i(f)\}$ e seja $h := \sum_{j \in J} f_j X^j$. Então $w_i(f-h) > w_i(f)$. Seja $r \in \mathbb{N}$, $r > w_i(f)$. Tomando os elementos a e b definidos no parágrafo anterior, isto é, tal que $v_i(a) = v_i(b) = 1$ e $\min\{v_j(a), v_j(b)\} = 0$ $\forall j \in I - \{i\}$, seja $y := \frac{X^2 h}{a^r + b^r X + X^2 g}$.

Se $j \in I - \{i\}$ então $w_j(X^2 h) \geq 0$ pois $X^2 h \in R[X]$.

$$\begin{aligned} w_j(a^r + b^r X + X^2 g) &= \\ &= w_j(a^r + b^r X + g_0 X^2 + g_1 X^3 + \cdots + g_m X^{m+2} + \cdots) \\ &= \min\{v_j(a^r), v_j(b^r), v_j(g_0), \ldots, v_j(g_m), \ldots\} \\ &= 0 \text{ pois } \min\{v_j(a), v_j(b)\} = 0. \end{aligned}$$

Assim, $w_j(y) \geq 0$ $\forall j \in I - \{i\}$.

$$\begin{aligned} w_i(y-x) &= w_i\left(\frac{X^2 h}{a^r + b^r X + X^2 g} - \frac{f}{g}\right) \\ &= w_i\left(\frac{X^2 g(h - f) - (a^r + b^r X)f}{(a^r + b^r X + X^2 g)g}\right) > 0 \text{ pois:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_i(X^2g(h-f)-(a^r+b^rX)f) &\geq \\ &\geq \min\{w_i(X^2)+w_i(g)+w_i(h-f),\, w_i(a^r+b^rX)+w_i(f)\} \\ &= \min\{w_i(g)+w_i(h-f),\, \min\{rv_i(a), rv_i(b)\}+w_i(f)\} \\ &= \min\{w_i(f)+w_i(h-f),\, r+w_i(f)\} \\ &= \min\{w_i(h-f), r\} + w_i(f) \\ &> w_i(f) + w_i(f) = 2w_i(f). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_i((a^r + b^rX + X^2g)g) &= w_i(a^r + b^rX + X^2g) + w_i(g) \\ &= w_i(X^2g) + w_i(g) = 2w_i(g) = 2w_i(f) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} w_i(a^r + b^rX) &= \min\{v_i(a^r), w_i(b^r)\} \\ &= \min\{rv_i(a), rv_i(b)\} \\ &= \min\{r, r\} = r > \\ &> w(f) = w(g) = w(X^2g) \end{aligned}}$$

Assim verificamos o item (4) de (4.6) e portanto, T é um domínio de Dedekind.∎

Finalizando este parágrafo, vamos apresentar uma aplicação das Proposições (4.7) e (4.12).

Exemplo : Sejam K um corpo de característica diferente de 2, x uma indeterminada e $y^2 = x^{2n} + 1$ onde n é um inteiro positivo. Seja D o fecho integral de K[x] em K(x,y). Sejam $V := K[x^{-1}]_{(x^{-1})}$, W uma extensão de V a K(x,y) e $R := D \cap W$. Vamos mostrar que R é um domínio de Dedekind e que R é um domínio de ideais principais se e somente se n=1.

Afirmação 1: K[x,y] = D.

Prova: Como y é raiz de $Y^2 - (x^{2n} + 1) \in D[Y]$ e D é o fecho integral de $K[x]$, então $K[x,y] \subseteq D$. Por outro lado, $K[x,y]$ é integralmente fechado [F-pag.49], logo, temos a igualdade.■

Afirmação 2: Existem duas extensões de V a $k(x,y)$ e cada extensão é um anel de valorização principal. Além disso, se w é a valorização normalizada associada a uma extensão de V, então $w(y) = -n$ e podemos considerar $w(y-x^n) = n$.

Prova: O polinômio $Y^2 - (x^{2n} + 1) \in K(x)[Y]$ é irredutível, pois caso contrário, se

$$Y^2 - (x^{2n} + 1) = (Y - f)(Y - g)$$

onde $f,g \in K(x)$, então $Y^2 - (x^{2n} + 1) = Y^2 - (f + g)Y + fg$, logo, $f = -g$ e portanto $f^2 = x^{2n} + 1$ o que é um absurdo pois $x^{2n} + 1$ não tem raizes múltiplas.

Assim, $[K(x,y):K(x)] = 2$ e então por [E-pag.99] existe no máximo duas extensões de V a $K(x,y)$. Seja W uma extensão e seja w uma valorização associada tal que $w_{|K(x)} = v$. Temos que $w(y) = \frac{1}{2}w(y^2) = \frac{1}{2}w(x^{2n} + 1) = \frac{1}{2}v(x^{2n} + 1) = -n$.
Temos tambem que $0 = w(1) = w(y^2-x^{2n}) = w(y-x^n) + w(y+x^n)$. Se considerarmos $w(y-x^n) \geq 0$, como $w(x^n) = v(x^n) = -n$, então $\min\{w(y-x^n), w(2x^n)\} = -n$, logo, $w(y+x^n) = w(y-x^n+2x^n) = -n$. Como $w(y-x^n) + w(y+x^n) = 0$ então $w(y-x^n) = n$.

Seja τ o automorfismo de $K(x,y)$ sobre $k(x)$ dado por $\tau(f+yg) = f-yg$ onde $f,g \in K(X)$. Definindo $w'(y+x^n) := w(\tau(y+x^n)) = w(-y+x^n) = n \neq -n$. Logo, $w \neq w'$ e temos então duas extensões de V a $K(x,y)$.

Analogamente teremos duas extensões se considerarmos

$w(y-x^n)\leq 0$ e por [G-pag.260] cada valorização é discreta de posto 1.■

Afirmação 3: Se $W' \in \mathcal{E}(K[x,y])^*$ então W' é extensão de algum anel de valorização de $\mathcal{E}(k[x])^*$.

Prova: [B-Cap. VII, 1.8, Proposição 12].■

Afirmação 4: Se W é uma extensão de V a $K(x,y)$ então R $(:= K[x,y]\cap W)$ é um domínio de Dedekind.

Prova: Em vista da prova da Afirmação 2 podemos considerar $w(y-x^n) = n$. Seja $p = m_W \cap R$. Como $y-x^n \in p$ então por (2.4) R e K[x,y] têm o mesmo corpo de frações. Assim, para provar que R é um domínio de Dedekind basta provar que p é maximal e aplicar (4.7) pois por [G- pag.495], K[x,y] é um domínio de Dedekind.

Suponhamos por absurdo que p não é maximal. Como $w(y+x^n) = -n$ então $R \neq K[x,y]$, logo, por (1.2) $W \in \mathcal{E}(R)^*$ e por (1.3) $p \in \eta(R)$. Seja m um ideal primo de R de altura 2 (por (4.13) $p\subseteq m$) e seja $q \in \eta(R)$, $q \neq p$ e tal que $q \subseteq m$. Por (1.3) $R_q \in \mathcal{E}(R)^* \subseteq \mathcal{E}(K[x,y])^*$. Pela Afirmação 3, temos que R_q é extensão de algum anel de valorização de $\mathcal{E}(K[x])^*$, digamos, de $K[x]_{(g)}$,

$g = x^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_o \in K[x]$, logo, $g \in qR_q$. Temos:

$w(g^n(y-x^n)^m) = w(g^n) + w((y-x^n)^m) = -nm + mn = 0$, logo,

$g^n(y-x^n)^m \in K[x,y]\cap W = R$. Como $g^n(y-x^n)^m \in qR_q$ então

$g^n(y-x^n)^m \in qR_q \cap R = q$. (1)

Temos ainda que $(y-x^n)^2 + 2x^n(y-x^n) = y^2-x^{2n} = 1$, logo,

$[(y-x^n)^2+2x^n(y-x^n)]^m = 1$, assim, $h+2^m x^{nm}(y-x^n)^m = 1$ (2)

onde $h := \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i}(y-x^n)^{2i}[2x^n(y-x^n)]^{m-i} \in K[x,y]$ e

$w(h) \geq \min_{i\geq 1}\{2i\,w(y-x^n)+(m-i)w(x^n(y-x^n))\} = \min_{i\geq 1}\{2in\} = 2n > 0$,

logo, $h \in \boldsymbol{p}$ (3)

Seja $g_1 := g^n - x^{nm}$. g_1 tem grau menor que nm, logo, $w(g_1) > -nm$ e assim $w(g_1(y-x^n)^m) > -nm+nm=0$ e portanto

$g_1(y-x^n)^m \in \boldsymbol{p}$ (4)

$$h+2^m g^n(y-x^n)^m - 2^m g_1(y-x^n)^m =$$

$$= h+2^m(g^n-g_1)(y-x^n)^m$$

$$= h+2^m x^{nm}(y-x^n)^m \underset{(2)}{=} 1 \qquad (5)$$

Por (3), $h \in \boldsymbol{p}$

Por (1), $2^m g^n(y-x^n)^m \in \boldsymbol{q}$

Por(4), $2^m g_1(y-x^n)^m \in \boldsymbol{p}$

Então por (5) $1 = h + 2^m g^n(y-x^n)^m - 2g_1(y-x^n)^m \in \boldsymbol{q} + \boldsymbol{p} \subseteq \boldsymbol{m}$. Absurdo pois $\boldsymbol{m}$ é um ideal primo. Assim, $\boldsymbol{p}$ é um ideal maximal e então por (4.7), R é um domínio de Dedekind.■

Afirmação 5: Sejam $f, g, f_1, g_1 \in K[x]$. Então:

i) Se $f+yg = f_1+yg_1$ então $f = f_1$ e $g = g_1$.

ii) $f+yg$ é uma unidade em $K[x,y]$ se e somente se $(f+yg)(f-yg) \in K-\{0\}$.

Prova: Segue do fato que $K(x,y)$ é uma extensão de grau 2 de $K(x)$.■

Afirmação 6: R é um domínio de ideais principais se e somente se n=1.

Prova: Como na Afirmação 4, vamos considerar $w(y-x^n) = n$.

Se $n = 1$, então $w(y-x) = 1$. Se $W_1 \in \varepsilon(R)^*$, $W_1 \neq W$, como $\varepsilon(R)^* \subseteq \varepsilon(K[x,y])^*$ então $W_1 \in \varepsilon(K[x,y])^*$, logo, pela Afirmação 3, W_1 é umaextensão de algum anel de valorização de $\varepsilon(K[x])^*$, digamos, de $K[x]_{(f)}$ para algum $f \in K[x]$ irredutível. Seja w_1 a valorização normalizada associada a W_1. Então $w_1(f) > 0$.

Se $f = x$ então $w_1(y) = \frac{1}{2}w_1(y^2) = \frac{1}{2}w_1(x^2+1) = 0$, logo, $w_1(y-x)=0$.

Se $f \neq x$ então $w_1(x) = 0$. Se $w_1(y-x) > 0$ então $w_1(y+x)=w_1(y-x+2x)=0$ pois $w_1(y-x) > 0 = w_1(2x)$, logo, $w_1(1)=w_1(y^2-x^2)=w_1(y-x)+w_1(y+x)>0$. Absurdo. Logo, $w_1(y-x) = 0$. Assim, por (4.11) $p = (y-x)R$ e então por (4.12) R é um domínio de fatoração única. Como pela Afirmação, 3 R é um domínio de Dedekind, então R é um domínio de ideais principais.

Se $n > 1$ vamos mostrar que não existe $g \in R$ tal que $w(g) = 1$ e $w_1(g) = 0 \ \forall \ W_1 \in \varepsilon(R)^* - \{V\}$. Suponhamos por absurdo que existe tal g. Como $R = K[x,y] \cap W$, então por (1.3) $\varepsilon(R)^* \subseteq \varepsilon(K[x,y])^* \cup \{W\}$ e como R é um domínio de Dedekind, então por (1.6) $\varepsilon(R)^* = \varepsilon(K[x,y])^* \cup \{W\}$. Assim, se $W_1 \in \varepsilon(K[x,y])^*$, então $w_1(g) = 0$, logo, g é unidade em $K[x,y]$, digamos, $g=g_1+yg_2$ onde $g_1, g_2 \in K[x]$. Pela Afirmação 5-ii, $(g_1+yg_2)(g_1-yg_2) = c \in K-\{0\}$, logo,

$w(g_1+yg_2) + w(g_1-yg_2) = w(c) = 0$ e portanto

$w(g_1-yg_2) = -w(g_1+yg_2) = -w(g) = -1$.

$g_1 \neq 0$ pois caso contrário

$-1 = w(yg_2) = w(y) + w(g_2) = -n + w(g_2) \leq -n < -1$. Absurdo

$g_2 \neq 0$ pois caso contrário, $1 = w(g) = w(g_1) \leq 0$ o que é um absurdo. Assim, $g_1 \neq 0$ e $g_2 \neq 0$, $-1 = w(g_1 - yg_2) = w(g_1 + yg_2 - 2yg_2) = w(g - 2yg_2) = \min\{1, -n + w(g_2)\} \leq -n < -1$. Absurdo. Assim, não existe $g \in R$ tal que $w(g) = 1$ e $v(g) = 0$ para todas as outras valorizações essenciais de R. Logo, por (4.9) R não é um domínio de fatoração única e portanto não é um domínio de ideais principais.

Afirmação 7: $R = K[\ \{x^t(y - ax^n)\}_{t=1}^{n}\ ]$.

Antes de provar a afirmação 7 vamos fazer um lema:

Lema : Seja $T := K[\ \{x^t(y - x^n)\}_{t=1}^{n}\ ] + yK[x] + xK + x^2K + \cdots + x^{n-1}K$. Entao $K[x,y] = T$.

Prova: É claro que $T \subseteq K[x,y]$. A outra inclusão vamos fazer por passos:

Passo 1: Para $0 \leq u < n$: $x^{n+u} = x^u x^n = x^u(x^n - y) + yx^u \in T$.

Passo 2: Para $0 \leq u < n$: $x^{2n+u} = x^n x^{n+u} \underset{(1)}{=} x^n[x^u(x^n - y) + yx^u]$

$= x^{n+u}(x^n - y) + x^{n+u}y \underset{(1)}{=} [x^u(x^n - y) + yx^u](x^n - y) + x^{n+u}y =$

$x^u(x^n - y)^2 + yx^u(x^n - y) + yx^{n+u} = x^u(x^n - y)^2 + yx^{n+u} - y^2x^u + x^{n+u}y =$

$x^u(x^n - y)^2 + 2yx^{n+u} - (x^{2n} + 1)x^u = x^u(x^n - y)^2 + 2yx^{n+u} - x^{2n+u} - x^u \Rightarrow$

$2x^{2n+u} = x^u(x^n - y)^2 + 2yx^{n+u} - x^u \Rightarrow$

$x^{2n+u} = \frac{1}{2}[x^u(x^n - y)^2 + 2yx^{n+u} - x^u] \in T$.

Passo 3: Para $0 \leq u < n$: $x^{n+u}(x^n - y) = x^{2n+u} - yx^{n+u} \underset{(2)}{\in} T$.

Passo 4: $x^r(x^n - y)^s \in T$ se $r \leq ns$.

Se $s = 0$ então $r = 0$. Seja então $s > 0$.

Se $r=ns$ entao

$x^r(x^n-y)^s = [x^n(x^n-y)]^s \in K\left[\ \{x^t(y-x^n)\}_{0\leq t\leq n}\ \right] \subseteq T.$

Se $r<ns$ sejam q,u inteiros positivos tais que $r=qn+u$ e $0\leq u<n$.

Então $qn\leq qn+u=r<ns$, logo, $q<s$, digamos, $s=q+t$, $t\in\mathbb{Z}$, $0<t$.

$x^r(x^n-y)^s = x^r(x^n-y)^q(x^n-y)^t = x^u x^{qn}(x^n-y)^q(x-y)^t =$

$[x^n(x^n-y)]^q x^u(x^n-y)(x^n-y)^{t-1} \in K\left[\ \{x^t(y-x^n)\}_{0\leq t\leq n}\ \right] \subseteq T.$

Passo 5: $xx^{ns}(x^n-y)^s \in T$. Por indução sobre s:

Para $s = 0$ temos que $x\in T$.

Hipotese de indução: $s \geq 0$ e $xx^{ns}(y-x)^s \in T$.

$$
\begin{aligned}
xx^{n(s+1)}(x^n-y)^{s+1} &= xx^n(x^n-y)x^{ns}(x^n-y)^s \\
&= x^{n+1}(x^n-y)x^{ns}(x^n-y)^s \\
&= (x^{2n+1}-yx^{n+1})x^{ns}(x^n-y)^s \\
&\underset{(1)}{=} \{\tfrac{1}{2}[x(x^n-y)^2+2yx^{n+1}-x]-yx^{n+1}\}x^{ns}(x^n-y)^s \\
&= \{\tfrac{1}{2}x(x^n-y)^2+yx^{n+1}-\tfrac{1}{2}x-yx^{n+1}\}x^{ns}(x^n-y)^s \\
&= \tfrac{1}{2}x^{ns+1}(x^n-y)^{s+2}-\tfrac{1}{2}xx^{ns}(x^n-y)^s \in T \text{ por } (4)
\end{aligned}
$$

e hipótese de indução.

Passo 6: $\forall x\geq 0$, $x^m \in T$. Por indução sobre m:

Se $m = 0$ então $x^m = 1 \in T$.

Hipótese de indunão: $m \geq 0$ e $x^m\in T$.

$x^{m+1} = xx^m = x($soma de termos da forma $a[x^r(x^n-y)]^s$, $yf(x)$, $bx^j)$ onde $0\leq r\leq ns$, $0\leq j\leq n-1$, $s\geq 0$, $a,b\in K$, $f(x)\in K[x]$.

x^{m+1} = soma de termos da forma $yxf(x)$, bx^{j+1} e

$$
ax^{r+1}(x^n-y)^s = \begin{cases} axx^{ns}(x^n-y)^s & \text{se } r=ns \\ ax^{r+1}(x^n-y)^s & \text{se } r+1\leq ns \end{cases}
$$

Por (1) e (4) e (5) x^{m+1} = soma de termos de T.

Assim, $x^{m+1} \in T$.

Passo 7: $K[x,y] \subseteq T$.

Por (5), $x^m \in T$ $\forall m \geq 0$ e como T é um K-módulo, então $K[x] \subseteq T$.

$K[x,y] = K[x] + yK[x]$ pois $y^2 = x^{2n}+1$. Como $K[x]$ e $yK[x]$ são K-submódulos de T, então $K[x]+yK[x] \subseteq T$.

Assim, $K[x,y] = T$. ■

Prova da afirmação 7:

É claro que $K\left[\{x^t(y-x^n)\}_{t=1}^{n} \right] \subseteq K[x,y] \cap W$.

Seja $h \in K[x,y]$. Pelo lema anterior, $h = h_1 + yh_2 + h_3$ onde $h_1 \in K\left[\{x^t(y-x^n)\}_{t=1}^{n}\right]$, $h_2 \in K[x]$ e $h_3 \in xK + x^2K + \cdots + x^{n-1}K$.
Assim, $w(h_1) \geq 0$; se $h_3 \neq 0$ então $-1 \geq w(h_3) > -n$ e se $h_2 \neq 0$ então $w(yh_2) \leq -n$.

Se $h \in W$, então $w(h) \geq 0$.

Se $h_2 \neq 0$ então $w(h) = w(yh_2) \leq -n$. Absurdo. Logo, $h_2 = 0$.

Se $h_3 \neq 0$, então $w(h) = w(h_3) \leq -1$. Absurdo. Logo, $h_3 = 0$.

Assim, $h \in K\left[\{x^t(y-x^n)\}_{t=1}^{n} \right]$ e portanto

$K[x,y] = K\left[\{x^t(y-x^n)\}_{t=1}^{n} \right]$. ■

6. INTERSEÇÃO DAS POTÊCIAS DE UM IDEAL PRIMO EM UM DOMÍNIO DE KRULL

Para um domínio noetheriano, é conhecida a propriedade $\cap p^n=(0)$ para qualquer ideal $p \neq (1)$ [A-M-pag.110]. Uma pergunta natural que surge é se esta propriedade vale para outras famílias de domínios satisfazendo algum tipo de condição de finitude, como por exemplo, para a família de domínios de Krull.

Em [H-L-V] foi contruido um domínio de Krull de dimensão infinita contendo um ideal primo m tal que $\cap m^n \neq (0)$, mas continua aberta a questão de saber existe um domínio de Krull de dimensão finita contendo um ideal primo p tal que $\cap p^n \neq (0)$ e a fortiori, continua aberta a questão com a exigência suplementar do ideal primo p ser finitamente gerado.

Uma classe importante de domínios de Krull consiste dos fechos integrais de domínios noetherianos [Na pag.118]. Neste parágrafo, verificamos que para um domínio R desta classe temos $\cap p^n = (0)$ para todo ideal primo p.

Assim, estamos obrigados a olhar para os (bem mais difíceis de encontrar) domínios de Krull de dimensão finita que não são fecho integrais de domínios noetherianos. Nós verificamos neste caso que se p é um ideal primo de altura 1 (resp. finitamente gerado de altura 2), temos também que $\cap p^n = (0)$. Assim, estamos obrigados a olhar para os domínio de Krull de dimensão maior ou igual a 3.

Neste parágrafo vamos responder à questão aberta construindo um domínio de fatoração única (e não somente domínio de Krull) quase local de dimensão menor ou igual a 4 com um ideal primo finitamente gerado $\mathfrak{m}$ tal que $\cap\mathfrak{m}^n \neq (0)$. Nossa construção combina técnicas de Fujita [Fu] e Anderson-Mulay [An-Mu].

(6.1) **Teorema** (de Chevalley): Seja R um domínio noetheriano e seja $\mathfrak{m}$ um ideal primo de R. Então existe um anel de valorização principal $V \supseteq R$ tal que $\mathfrak{m}_V \cap R = \mathfrak{m}$.

Prova: Podemos supor que R é local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ pois $\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}} \cap R = \mathfrak{m}$.

Se $\mathfrak{m}$ tem altura 1, seja $\bar{R}$ o fecho integral de R. Pelo Teorema de Mori e Nagata [Na-pag.118], $\bar{R}$ é um domínio de Krull e existe um ideal $\mathfrak{n}$ de $\bar{R}$ tal que $\mathfrak{n}\cap R = \mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ tem altura 1. Por (1.3) $\bar{R}_{\mathfrak{n}}$ é um anel de valorização principal e $\mathfrak{n}\bar{R}_{\mathfrak{n}} \cap R = \mathfrak{n}\bar{R}_{\mathfrak{n}} \cap \bar{R} \cap R = \mathfrak{n} \cap R = \mathfrak{m}$, provando o teorema para altura 1.

Se $ht(\mathfrak{m}) = n > 1$, por [Na-pag.37] existem $a_1, \ldots, a_n \in R$ tais que $\mathfrak{m}$ é um primo minimal do ideal $(a_1, \ldots, a_n)R$. Como R é local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ então $\mathfrak{m}$ é o único ideal primo que contem $(a_1, \ldots, a_n)R$. Por [Na-pag.37] existe um anel de valorização $W \supseteq R$ tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_W \cap R$. Podemos supor $w(a_1) = \min\{w(a_1), \ldots, w(a_n)\}$. Então $B := R[\frac{a_2}{a_1}, \ldots, \frac{a_n}{a_1}] \subseteq W$ é um domínio noetheriano e $(a_1, \ldots, a_n)B = a_1B \subseteq m_W \cap B$, logo, $a_1B \neq B$. Seja $\mathfrak{n}$ um ideal primo minimal de a_1B. Como B é noetheriano então $\mathfrak{n}$ tem altura 1, logo, existe um anel de valorização principal $V \supseteq B$ tal que $\mathfrak{m}_V \cap B = \mathfrak{n}$. Como $\mathfrak{n}$ contem

$a_1,\dots,a_n$ então $m_V \cap R$ contem $a_1,\dots a_n$, logo, $m_V \cap R = m$ pois m é o único ideal primo que contem $a_1,\dots,a_n$ e R é local com ideal maximal m. ■

(6.2) **Proposição:** Seja R um domínio noetheriano e seja $\bar{m}$ um ideal primo de $\bar{R}$ onde $\bar{R}$ é o fecho integral de R. Então $\bigcap(\bar{m})^n = (0)$.

Prova: Seja $m = \bar{m} \cap R$. Por [Na-pag.118], existe somente um número finito de ideais primos de $\bar{R}$ acima de m, digamos, $\bar{m},\bar{m}_2,\dots,\bar{m}_n$. Seja $x \in \bar{m} - \bar{m}_2 \cup \cdots \cup \bar{m}_n$. Seja $B := R[x]$ e seja $n := \bar{m} \cap B$. Assim, B é noetheriano e $\bar{m}$ é o único ideal primo de $\bar{R}$ acima de n pois $x \in n$ e $n \cap R = \bar{m} \cap R = m$. Por (6.1) existe um anel de valorização principal $V \supseteq B$ tal que $m_V \cap R = n$. Como $R \subseteq V$, por [E-pag.69] $\bar{R} \subseteq V$. Assim, $m_V \cap \bar{R}$ é um ideal primo de $\bar{R}$ acima de n, logo, $m_V \cap \bar{R} = \bar{m}$ pois, como vimos acima, $\bar{m}$ é o único ideal primo de $\bar{R}$ acima de n. Assim, $\bigcap_{n\geq 0}(\bar{m})^n \subseteq \bigcap_{n\geq 0}(m_V)^n = (0)$. ■

Se p é um ideal primo de altura 1 de um domínio de Krull, então $\cap p^n \subseteq \cap(pR_p)^n = (0)$ pois R_p é um anel de valorização principal. Se p tem altura 2 e é finitamente gerado então veremos a seguir que também $\cap p^n = (0)$.

(6.3) **Proposição:** Seja R um domínio de Krull e seja m um ideal primo de R finitamente gerado e de altura menor ou igual a 2. Então $\bigcap_{n\geq 0} m^n = (0)$.

Prova: Se $ht(m) = 1$, como foi observado acima, $\bigcap_{n\geq 0} m^n = (0)$. Se $ht(m) = 2$ então R_m é um domínio quase local de dimensão 2 com ideal maximal finitamente gerado. Logo, por [M-pag.295] R_m é um domínio noetheriano, e portanto $\bigcap_{n\geq 0} m^n \subseteq \bigcap_{n\geq 0} (mR_m)^n = (0)$.■

Os resultados a seguir serão úteis para verificar que o exemplo a ser construido posteriormente é um domínio de fatoração única.

(6.4) **Lema:** Seja R um domínio e seja $a\in R$ um elemento primo de altura 1, isto é, aR é um ideal primo de altura 1. Então R_{aR} é um anel de valorização principal. Além disso, se v é a valorização normalizada associada a R_{aR} e se $x \in R$ tal que $v(x) \geq n$ então $x = a^n y$ para algum $y \in R$.

Prova: Seja $J := \cap a^n R$. Por [K-pag.7 ex.5-(c)] temos que J é um ideal primo. Como aR é um ideal primo de altura 1, então $(0) \subseteq J \subseteq aR$, logo, $J = (0)$ pois $a \notin J$. Assim, por [G-pag.225] R_{aR} é anel de valorização principal associado à valorização (a)-ádica.

Se $x\in R$ e $v(x)\geq n$, por indução, $x = a^n y$ para algum $y\in R$ pois:

Se $n=1$ então $x \in m_v \cap R = aR$, logo, $x = ay$ para algum $y\in R$.

Se $n>1$ então $v(x) \geq n-1$, logo, $x = a^{n-1}y$, $y\in R$ e $v(y) \geq 1$. Então $y = az$, $z\in R$ e assim, $x = a^n z$, $z\in R$.■

(6.5) **Proposição:** Sejam R um domínio $a_1,\dots,a_n$ elementos primos de altura 1 de R. Seja M o sistema multiplicativo gerado por $a_1,\dots,a_n$. Então:

1) $R = M^{-1}R\cap R_{a_1R}\cap\cdots\cap R_{a_nR}$ é interseção de $M^{-1}R$ com uma família finita de anéis de valorização principais.

2) Se $M^{-1}R$ é um domínio de Krull, então R é um domínio de Krull.

3) Se $M^{-1}R$ é um domínio de fatoração única, então R é um domínio de fatoração única.

Prova: 1) Para cada i, seja v_i a valorização associada ao anel de valorização R_{a_iR}. Vamos supor também que se $i\neq j$ então $a_iR \neq a_jR$, pois em caso de igualdade podemos retirar R_{a_jR} da interseção. Assim, se $i\neq j$, temos $v_i(a_j) = 0$. (*)

Seja $x \in M^{-1}R\cap R_{a_1R}\cap\cdots\cap R_{a_nR}$. Como $x \in M^{-1}R$, temos $x := \dfrac{a}{a_1^{r_1}\cdots a_n^{r_n}}$ para algum $a\in R$ e $r_1,\dots,r_n \in \mathbb{N}$. Para cada i, $x \in R_{a_iR}$, logo, $v_i(x)\geq 0$, isto é, $v_i(a)\geq v_i(a_1^{r_1}\cdots a_n^{r_n}) = r_i$ por (*). Pelo lema anterior, temos que $a = ba_1^{r_1}\cdots a_n^{r_n}$ para algum $b\in R$. Assim, $x := \dfrac{ba_1^{r_1}\cdots a_n^{r_n}}{a_1^{r_1}\cdots a_n^{r_n}} = b\in R$, Logo, $M^{-1}R\cap R_{a_1R}\cap\cdots\cap R_{a_nR} \subseteq R$. Como a outra inclusão é imediata, então, $R = M^{-1}R\cap R_{a_1R}\cap\cdots\cap R_{a_nR}$ e por (6.4), para cada i, R_{a_iR} é um anel de valorização principal.

2) Se $M^{-1}R$ é um domínio de Krull, então por (1.1), R é um domínio de Krull pois R é uma interseção finita de domínios de Krull.

3) Se $M^{-1}R$ é um domínio de fatoração única então $M^{-1}R$ é um domínio de Krull, logo, por (2), R é um domínio de Krull.

Por hipótese, para cada $i\in\{1,\dots,n\}$ $a_iR \in \eta(R)$.

Definindo $D_1 := R_{a_1R}\cap\cdots\cap R_{a_nR}$, então por (5.4), D_1 é um domínio de ideais principais e por (1.3) e (1.6), $\mathcal{E}(D_1)^* = \{R_{a_iR}\}_{i=1}^{n}$.

Para todo $p\in\eta(D_1)$, por (1.3), $p = a_iR_{a_iR}\cap D_1$ para algum $i\in\{1,\dots,n\}$, logo, $p\cap R = a_iR_{a_iR}\cap D_1\cap R = a_iR_{a_iR}\cap R = a_iR \in \eta(R)$ é um ideal principal. Tomando $D_2 := M^{-1}\cap R$ em (4.12), temos que R é um domínio de fatoração única pois $R = D_1\cap D_2$.∎

Exemplo:

Sejam K um corpo e X_1, X_2, Y_1, Y_2 e Z indeterminadas sobre K. Definimos:

$$f_1 := Z + Y_1$$

$$g_1 := Z + X_1$$

$$f_{n+1} := (Y_2)^n Z^{(n+1)!} + \frac{f_n}{X_2} \quad \text{para } n \geq 1$$

$$g_{n+1} := (X_2)^n Z^{(n+1)!} + \frac{g_n}{Y_2} \quad \text{para } n \geq 1$$

Afirmação 1: Para $n \geq 1$ temos

$$(X_2)^n\left(\frac{f_n}{X_2}\right) = Y_1 + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!} \quad \text{e} \quad (Y_2)^n\left(\frac{g_n}{Y_2}\right) = X_1 + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}$$

Prova: Vamos mostrar por indução sobre n, a primeira equação:

Vale para n=1.

Suponhamos que vale para n. Temos:

$$
\begin{aligned}
(X_2)^{n+1}\left[\frac{f_{n+1}}{X_2}\right] &= (X_2)^n f_{n+1} \\
&= (X_2)^n\left[(Y_2)^n Z^{(n+1)!} \quad + \quad \frac{f_n}{X_2}\right] \\
&= (X_2)^n (Y_2)^n Z^{(n+1)!} + (X_2)^n\left[\frac{f_n}{X_2}\right] \\
&= (X_2Y_2)^n Z^{(n+1)!} + Y_1 + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!} \\
&= Y_1 + \sum_{i=1}^{n+1}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}, \text{ provando a afirmação.}
\end{aligned}
$$

Definimos para cada $n \geq 1$,

$$
A_n := K\left[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z, \left\{ \frac{f_i}{X_2}, \frac{g_i}{Y_2} \;/\; i=1,\ldots,n \right\} \right].
$$

Afirmação 2: Para cada $n \geq 1$, $A_n = K\left[X_2, Y_2, Z, \frac{f_n}{X_2}, \frac{g_n}{Y_2} \right]$.

Prova: Temos que

$$
\frac{f_{i-1}}{X_2} = f_i - (Y_2)^{i-1}Z^{i!} \in K\left[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z, \frac{f_i}{X_2}, \frac{g_i}{Y_2} \right],
$$

$$
\frac{g_{i-1}}{Y_2} = g_i - (X_2)^{i-1}Z^{i!} \in K\left[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z, \frac{f_i}{X_2}, \frac{g_i}{Y_2} \right],
$$

logo, se $1 \leq i \leq n$, $\frac{f_i}{X_2}, \frac{g_i}{Y_2} \in K\left[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z, \frac{f_n}{X_2}, \frac{g_n}{Y_2} \right]$.

Pela Afirmação 1 temos:

$$
Y_1 = (X_2)^n\left[\frac{f_n}{X_2}\right] - \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!} \quad \text{e}
$$

$$
X_1 = (Y_2)^n\left[\frac{g_n}{Y_2}\right] - \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}
$$

assim, X_1 e Y_1 estão em $K\left[X_2, Y_2, Z, \frac{f_n}{X_2}, \frac{g_n}{Y_2} \right]$, provando a afirmação.

Afirmação 3: $X_2, Y_2, Z, \frac{f_n}{X_2}, \frac{g_n}{Y_2}$ são algebricamente independentes sobre K.

Prova: Pela Afirmação 1, $X_2^n \frac{f_n}{X_2} = \left(Y_1 + \sum_{i=1}^{n} (X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}\right)$ e

$$Y_2^n \frac{g_n}{Y_2} = \left(X_1 + \sum_{i=1}^{n} (X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}\right)$$

Como X_1, X_2, Y_1, Y_2, e Z são indeterminadas sobre K então X_2, Y_2, Z, $X_2^n \frac{f_n}{X_2}$ e $Y_2^n \frac{g_n}{Y_2}$ são algebricamente independentes sobre K, logo, X_2, Y_2, $Z, \frac{f_n}{X_2}$ e $\frac{g_n}{Y_2}$ são algebricamente independentes sobre K.

Afirmação 4: X_2A_n , Y_2A_n , $(X_2,Y_2)A_n$ e $(X_2,Y_2,Z)A_n$ são ideais primos de A_n.

Prova: Segue da afirmações 2 e 3.

Definimos: $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$. Observe que

$$A\left[\frac{1}{X_2Y_2}\right] = K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,Z]\left[\frac{1}{X_2Y_2}\right] ,$$

logo $Q(A) = K(X_1,X_2,Y_1,Y_2,Z)$.

Afirmação 5: X_2A, Y_2A, $(X_2,Y_2)A$ e $(X_2,Y_2,Z)A$ são ideais primos de A.

Prova: Vamos provar que X_2A é um ideal primo de A. Os outros casos são análogos. Sejam $a,b \in A$ tais que $ab \in X_2A$, digamos, $ab = X_2c$ para algun $c \in A$. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $a,b,c \in A_n$. Então $ab \in X_2A_n$. Pela afirmação anterior, X_2A_n é um ideal primo. Então a ou b está em X_2A_n , logo a ou b está em X_2A e portanto X_2A á um ideal primo de A. $X_2A \neq A$ pois se $a \in X_2A$, digamos, $a = X_2b$, $b \in A$, então $b \in A_n$ para algum n, logo, $a \in X_2A_n$ que é um ideal primo (afirmação anterior), logo, $a \neq 1$. Assim, $1 \notin X_2A$.

Afirmação 6: Y_2A e X_2A têm altura 1.

Prova: Seja $\theta: K[X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z] \longrightarrow K[[X_2, Y_1, Y_2, Z]]$ dada por $\theta(X_2) := X_2$, $\theta(Y_1) := Y_1$, $\theta(Y_2) := Y_2$, $\theta(Z) := Z$ e

$\theta(X_1) := -\sum_{i=1}^{\infty}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}$. Por [B-CapVI-3-Ex:1],

$\sum_{i=1}^{\infty}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}$ é transcendente sobre $K(X_2, Y_2, Z)$, logo, θ é injetiva e portanto θ pode ser estendida a um homomorfismo injetivo entre os corpos de frações. Agora,

$$\theta\left(\frac{g_n}{Y_2}\right) = \theta\left([X_1 + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}](Y_2)^{-n}\right)$$

$$= [-\sum_{i=1}^{\infty}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!} + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}](Y_2)^{-n}$$

$$= [-\sum_{i=n+1}^{\infty}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}](Y_2)^{-n}$$

$$= -\sum_{i=n+1}^{\infty}(X_2)^{i-1}(Y_2)^{i-(n+1)}Z^{i!} \in K[[X_2, Y_1, Y_2, Z]]$$

$$\theta\left(\frac{f_n}{X_2}\right) = \theta\left([Y_1 + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}](X_2)^{-n}\right)$$

$$= [Y_1 + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}](X_2)^{-n} \in K[[X_2, Y_1, Y_2, Z]]\left[\frac{1}{X_2}\right].$$

Assim, θ pode ser estendida a um homomorfismo injetivo de A a $K[[X_2, Y_1, Y_2, Z]]\left[\frac{1}{X_2}\right]$. Como $\bigcap_{n=0}^{\infty}(Y_2)^nK[[X_2, Y_1, Y_2, Z]]\left[\frac{1}{X_2}\right] = (0)$, então $\bigcap_{n=0}^{\infty}(Y_2)^nA = (0)$ e por [K-ex.5 pag.7], Y_2A tem altura 1.

De maneira análoga pode-se provar que X_2A tem altura 1.

Afirmação 7: A é um domínio de fatoração única.

Prova: Seja S o sistema multiplicativo gerado por X_2 e Y_2. Então $S^{-1}A = A\left[\frac{1}{X_2Y_2}\right] = K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,Z]\left[\frac{1}{X_2Y_2}\right]$ é um domínio de fatoração única. Logo, por (6.5), A é um domínio de fatoração única.

Afirmação 8: $\bigcap_{n=0}^{\infty}[(X_2,Y_2)A]^n \neq (0)$.

Prova: Pela afirmação 1, $\forall n\in\mathbb{N}$, $(X_2)^n\left(\frac{f_n}{X_2}\right) - (Y_2)^n\left(\frac{g_n}{Y_2}\right) =$

$Y_1 + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!} - \left(X_1 + \sum_{i=1}^{n}(X_2Y_2)^{i-1}Z^{i!}\right) = Y_1 - X_1$, logo,

$Y_1 - X_1 \in \bigcap_{n=0}^{\infty}[(X_2,Y_2)A]^n$.

Afirmação 9: $\mathrm{Dim}(A) = 5$.

Prova: Como $A\left[\frac{1}{X_2Y_2}\right] = K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,Z]\left[\frac{1}{X_2Y_2}\right]$ então $\dim(A) \geq 5$. Mas $K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,Z] \subseteq A \subseteq K(X_1,X_2,Y_1,Y_2,Z)$ e como $K[X_1,X_2,Y_1,Y_2,Z]$ é noetheriano de dimensão 5, então por [G-pag.360 e 361] $\dim(A) \leq 5$. Assim, $\dim(A) = 5$.

Afirmação 10: $3 \leq ht(X_2,Y_2)A \leq 4$.

Prova: Como $Z \notin (X_2,Y_2)A_n$ $\forall n\geq 1$, então $Z \notin (X_2,Y_2)A$, logo, $(X_2,Y_2)A \subset (X_2,Y_2,Z)A$, portanto $ht(X_2,Y_2)A < \dim(A) = 5$. Como $\cap[(X_2,Y_2)A]^n \neq (0)$, então por (6.3) $ht((X_2,Y_2)A) \geq 3$.

Conclusão: $A_{(X_2, Y_2)A}$ é um domínio de fatoração única quase local, $3 \leq \dim(A_{(X_2, Y_2)A}) \leq 4$ e a interseção das potências de seu ideal maximal é não nula.

Observação: $A_{(X_2, Y_2)A}$ fornece também um exemplo de um domínio de Mori de dimensão finita que contem um ideal divisorial que não tem decomposição primária (veja [H-L-V]-Prop. 5.6).

BIBLIOGRAFIA

[A-A] Anderson, D. D and Anderson, D. F.: Finite intersection of PID or factorial overrings. Canad. Math. Bull. vol 28(1), 1985.

[A-A-2] Anderson, D. D and Anderson, D. F.:: Locally factorial integral domains. J. Algebra 90, 265-283, 1984.

[A-M] Atiyah, M. F and Macdonald, I. G.: Introduction to commutative algebra. Addison-Wesley, 1969.

[An-Mu] Anderson, D. F. and Mulay, S. B.: Non-catenary factorial domains. Comm. in Algebra, 17(5), 1179-1185, 1989.

[B] Bourbaki, N.: Commutative algebra. Addison-Wesley, 1972.

[C] Claborn, L. L Every abelian group is a class group. Pacific J. Math. 18, 219-222, 1955.

[E] Endler, O.: Valuation theory. Universitext. Springer-Verlag, 1972.

[Ea] Eakin, P.: Doctoral thesis. Louisiana State University, 1968.

[E-H] Eakin, P. and Heinzer, W.: Some opens questions on minimal primes of a Krulldomain. Can. J. Math. 20, 1261-1264, 1968.

[E-H-2] Eakin, P. and Heinzer, W.: Non finiteness in finite dimensional Krull domains. J. Algebra 14, 333-340, 1970.

[E-H-3] Eakin, P. and Heinzer, W.: More noneuclidean PID's and Dedekind domains with prescribed class group. Proc. Amer. Math. Soc. 40, n$^{\underline{o}}$ 1, 66-68, 1973.

[F] **Fossum,R.M.:** The divisor class group of a Krull domain. Springer-Verlag, 1973.

[Fu] **Fujita,K.:** Three dimensional unique factorization domain which is not catenary. J.Algebra 49, 411-414, 1977.

[G] **Gilmer,R.:** Multiplicative ideal theory. Marcell Dekker, 1972.

[G-H] **Gilmer,R. and Heinzer,W.:** The quotient field of an intersection of integral domains. J.Algebra 7, 238-249, 1981.

[H] **Heinzer,W.:** Noetherian intersection of integral domains II. Lecture notes in mathematics n° 311, 107-119. Springer-Verlag, 1973.

[H-2] **Heinzer,W.:** On Krull overrings of a noetherian domain. Proc.Amer.Math.Soc. 22, 217-222, 1969.

[H-L-V] **Houston,E.G., Lucas,T.G. and Viswanathan,T.M.:** Primary decomposition of divisorial ideals in Mori domains. J.Algebra 117, 327-342, 1988.

[H-O] **Heinzer,W. and Ohm,J.:** Noetherian intersection of integral domains. Trans.Amer.Math.Soc.167, 291-308, 1972.

[K] **Kaplansky,I.:** Commutative algebra. Allyn and Bacon, Inc., 1970.

[M] **Matsumura,H.:** Commutative algebra. Second Edition. The Benjamin Cummins Publishin Company, 1980.

[N] **Nagarajan,K.R.:** Group acting on noetherian rings. Nieuv.Arch.Wisk.(3), XVI, 25-29, 1968.

[Na] **Nagata, M.:** Local rings. Interscience Publishers, 1962.

[S] **Samuel, P.:** Lectures on unique factorization domain. Tata Institute for Fundamental Research, n° 30. Bombay, 1964.

[Z-S] **Zariski, O. and Samuel, P.:** Commutative algebra. Vol. I and II. Van Nostrand. Princeton, N.J., 1958.